解決までの道筋を構想し数学的に表現する力を育む学習指導の在り方（第二年次）

―「考えのよさ」に気付かせる活動を通して―

長期研究員　髙 橋　駿 介

《研究の要旨》

本研究では，解決までの道筋を自分の力で構想し，課題解決の過程を数学的に表現する力の育成を目指した。このために，生徒が働かせた数学的な見方・考え方について，視点を明確にして比較することを通して，「考えのよさ」として価値付けた。そして，その「考えのよさ」を用いる場を設定し，有用性を実感させた。その結果，生徒は，「考えのよさ」の多様性に気付くとともに，新たな課題についても，解決までの道筋を構想し，数学的に表現することができるようになった。

Ⅰ　研究の趣旨

全国学力・学習状況調査結果において，本県では「事柄を調べる方法や手順を説明する問題」の平均正答率が，全国の平均正答率よりも例年低くなっている。これは，数学を活用して問題解決する方法を理解するとともに，自ら問題を見いだし，解決するための構想を立て，実践し，その過程や結果を評価・改善するという数学的活動の取組に課題があると考えられる。

また，中学校学習指導要領解説数学編には，数学的な見方・考え方を働かせた数学的活動を通して学習を展開し，その過程を数学的に表現する際，事象を簡潔・明瞭・的確に表現することが重要であると示されている。

このことから，課題解決までの道筋を構想し，その解決過程を簡潔・明瞭・的確に表現する生徒を育成したいと考え，本主題を設定した。

第一年次研究では，問い返しや，考えの比較により，見通しを立てる際に生徒が働かせた数学的な見方・考え方を顕在化させ，これを生徒に記録・蓄積させる活動を行った。その結果，無回答率が減少し，自力で解決までの道筋を構想することができる生徒が増加した。一方で，簡潔・明瞭・的確に表現できる考えを共有したものの，それを用いずに解決する生徒も見られた。これは，生徒が考えの有用性を実感するまでには至らなかったことが原因であると考えた。

そこで，第二年次研究では，生徒が働かせた数学的な見方・考え方について，視点を明確にした比較を通して価値付けたものを「考えのよさ」※1 とする。そして，その「考えのよさ」を用いる場を設定することで，有用性を実感させる。

これらの活動を授業の中で繰り返し行うことで，生徒は「考えのよさ」の多様性に気付き，新たな課題についても，解決まで道筋を構想し，数学的に表現することができるようになると考え，研究を進めることにした。

※１　本研究における「考えのよさ」とは，生徒が課題解決の過程で働かせた数学的な見方・考え方の中から，自分にとって簡潔・明瞭・的確に解決できる考えと価値付けたものとする。

Ⅱ　研究の概要

１　研究仮説

数学科の授業において，以下の手立てを講じれば，解決までの道筋を構想し数学的に表現する力を育むことができるであろう。

【手立て１】課題解決の方法・手順を見通すための対話活動

【手立て２】「考えのよさ」に気付かせるための比較の場の設定

【手立て３】考えの有用性を実感させるための場の設定と振り返り

２　研究の内容

(1)【手立て１】課題解決の方法・手順を見通すための対話活動

課題解決の見通しを立てる際，生徒に対し数学的な見方・考え方を働かせることを促す発問をする。また，どのような方法・手順で解決しようとしているか生徒同士で対話する場を設定する。これらにより，生徒が働かせている数学的な見方・考え方を生徒の言葉で表出させる。これらの対話を繰り返し行うことで，見通しを立てる際に生徒が働かせる数学的な見方・考え方の顕在化につなげる。この手立てにより，生徒は自分の力で課題解決の方法・手順を見通す手がかりをつかむことができると考える。

(2)【手立て２】「考えのよさ」に気付かせるための比較の場の設定

生徒が自他の解決の過程を比較する場を設定する。比較の視点は二つ設ける。一つ目は共通点・相違点，二つ目は考えのよいところとする。共通点・相違点という視点で比較させることで，それぞれの考えの数学的な見方・考え方を明確にし，関連付け，整理しやすくする。

また，考えのよいところという視点で比較させることで，簡潔・明瞭・的確な表現に気付かせ，「考えのよさ」として価値付ける。

この過程を通して得られる「考えのよさ」は，生徒が新たな課題に対して，解決までの道筋を構想し表現する際，自力解決の選択肢となり，「考えのよさ」の多様性に気付くようになると考える。

(3)【手立て３】考えの有用性を実感させるための場の設定と振り返り

【手立て１】【手立て２】を通して気付いた「考えのよさ」を実際に用いる場を設定し，その有用性を実感させる。その後，振り返りの場において，用いた「考えのよさ」を記述させ，授業で働かせた数学的な見方・考え方を焦点化し，価値付ける。

このことにより，新たな課題について，自分にとってよりよい解決までの道筋を構想し，簡潔・明瞭・的確に表現することができるようになると考える。

３　研究の実際

対象生徒	第３学年64名（２学級）
授業実践Ⅰ	「式の計算の利用」（６時間）
授業実践Ⅱ	「２次方程式」（11時間）

本稿では，授業実践Ⅱの実際を中心に述べる。

(1)【手立て１】について

第２時の授業を例に述べる。第２時では，以下の問題を提示した。

２次方程式 $x^2+6x-1=0$ の解を求めなさい。

この問題で生徒に働かせることを促したい数学的な見方・考え方は，「式を既習の形に変形する」である。そのためには，生徒に既習の問題との違いに着目させる必要がある。そこで，既習事項との違いに着目させる発問をした（**図１**）。

Ｔ　：今までの２次方程式とどこが違うかな。
　（既習事項との違いに着目させる発問）
Ｃ１：左辺が２乗の形「$(x+a)^2=0$」になっていない。
Ｔ　：では，この問題はどうすれば解けるようになるかな。
　（解決方法を問う発問）
Ｃ２：左辺を２乗の形にすればよい。
　（解決方法の見通しをもったと考えられる発言）

図１　解決方法の見通しをもたせるための生徒との対話

その後，この考えについて，どのように解決するか生徒同士で対話する時間を設けたところ，「左辺を２乗の形にするためには因数分解が使えそうだ」「因数分解するためには最後の数が-1ではだめだ」などの発言が見られた。これは「式を既習の形に変形する」という生徒が働かせている数学的な見方・考え方が表出した姿であると考えられる。このような発言を授業の中で価値付け，どのように考えて見通しをもったのかを共有した。

単元が進むと，**図２**のような姿が見られた。

【問題】２次方程式 $(x+2)^2-25=24$ の解を求めなさい。
Ｔ　：どうすれば解決できそうかな。
　（解決方法を問う発問）
Ｃ１：（　）がなくなれば（展開すれば）解けそう。
Ｃ２：右辺を０にすれば解けるはず。
　（既習事項との違いに着目した発言）

図２　数学的な見方・考え方を働かせている姿

単元が進むにつれ，教師から見方・考え方を促す発問をしなくても，生徒が「式を既習の形に変形する」という数学的な見方・考え方を働かせて解決方法を見通す姿が見られるようになった。

(2)【手立て２】について

第６時と第８時の授業を例に述べる。第６時では，以下の問題を提示した。

２次方程式 $x^2+10x-75=0$ の解を求めなさい。

生徒たちはこの問題に対し，解の公式，平方完成，因数分解という三つの解決方法で解を求めた。そこで，これら三つの考えの比較を行った。

まず，共通点・相違点という視点での比較を行った。相違点は，「解決方法が違う」という気付きとなった。共通点については，式変形の過程に着目するという視点を基に考えさせた。すると，生徒は「解を求める直前で１次方程式になっている」と気付いた。これにより，「２次方程式は１次方程式に帰着させることで解を求めることができる」ことを導きだした。また，「１次方程式にするという考えはどこかで使わなかったか」と問うと，「連立方程式のときも文字を減らして１元１次方程式にした」と既習の単元と，本単元を関連付け，整理することができた。

次に，考えのよいところという視点で比較を行った（**図３**）。

Ｔ　：それぞれの考えのどんなところがよいだろうか。
Ｃ１：解の公式はいつでも使えるところ。**（簡潔・明瞭・的確）**
Ｔ　：いつでも使えるのは解の公式だけかな。
Ｃ２：（　）の２乗をつくる方法もいつでも使える。**（簡潔・明瞭・的確）**
Ｔ　：因数分解はどうかな。
Ｃ３：この問題には使えたけど，いつでも使えるわけではない。
Ｃ４：でも，使えれば簡単に解ける。**（簡潔・明瞭・的確）**
Ｔ　：今回は三つの方法で解くことができたけど，どうしてその方法で解こうと思ったのかな。
Ｃ２：xの係数が偶数だったから，２で割っても分数が出てこないから，（　）の２乗をつくる方法を選んだ。**（Ｃ２にとっての簡潔・明瞭・的確）**
Ｃ５：x^2の係数が１で，かけて-75，足して10の組み合わせが見つかったから因数分解をした。**（Ｃ５にとっての簡潔・明瞭・的確）**
Ｃ６：いつでも解が求められるし，代入するだけだから解の公式を選んだ。**（Ｃ６にとっての簡潔・明瞭・的確）**

図３　考えのよいところという視点での対話

考えのよいところという視点で比較をさせることで，簡潔・明瞭・的確という視点に気付かせ，数学的な表現の価値付けをした。また，どうしてその考えを選択したのかを問うことで，生徒が働かせた数学的な見方・

考え方を表出させることができた。

その後，別の問題で自分の選択した考えについて生徒同士で対話する時間を設定したところ，「考えのよさ」として価値付ける生徒の姿が見られた（**図４**）。

【問題】２次方程式　$x^2+12x+30=0$ の解を求めなさい。
Ｃ１：どうして平方完成で解いたの。
Ｃ２：だって，２乗の前に何もついてないし，因数分解もできないから。
Ｃ１：そうだよね。だから私は（いつでも使える）解の公式を使ったんだ。
Ｃ２：僕も初めは解の公式を使おうと思ってたけど，面倒だと思っちゃって…。$2a$分の $-b$とか…。
Ｃ１：そっか。でも私は平方完成の方が難しいと思うな。解の公式は数を当てはめるだけで，すぐに計算できるから楽。（**Ｃ１の価値付け**）
Ｃ２：なるほど。そう考えると解の公式でもいいね。
Ｃ１：（解の公式でも）いいの。
Ｃ２：だって解き方は一つじゃないし。解の公式はちょっと計算が難しいけど，当てはめるだけだから。でも僕はこの問題は平方完成の方が簡単だと思うな。（**Ｃ２の価値付け**）

図４　「考えのよさ」として価値付ける様子

第８時では，以下の問題を提示した。

三つの続いた整数があります。それぞれの２乗の和が３６５です。このとき，この三つの続いた整数を求めなさい。

三つの続いた整数を文字で表す際，生徒からは一番小さい数を文字で表す考えと，真ん中の数を文字で表す考えが出された（**図５**）。

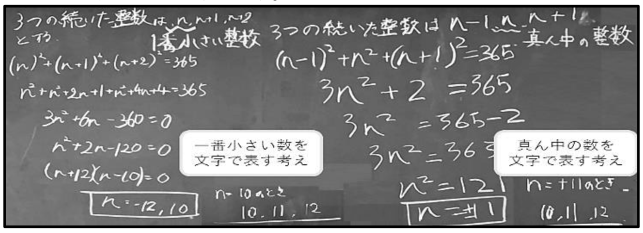


図５　第８時における生徒の考えの板書

まず，共通点・相違点という視点での比較を行った。相違点としては，「文字で表している数が違う」，「解が異なる」という気付きとなった。共通点については，「それぞれ２乗して加えるという立式の方法は同じである」，「問題の答えは同じである」と気付いた。これらの比較から，「どこを文字で表すかによって方程式の解は異なるため，最後に解の吟味をする必要があること」を共有した。

次に，考えのよいところという視点で比較を行った（**図６**）。

Ｔ　：それぞれの考えのどんなところがよいだろうか。
Ｃ１：真ん中の数を文字で表した方が楽だと思う。
Ｔ　：どうしてそう思ったの。
Ｃ１：計算していくと「$n^2=$」の形になるから。簡単に表せる。（**簡潔・明瞭・的確**）
Ｔ　：どうしてこの形（「$n^2=$」）の形になるの。
Ｃ２：$(n-1)^2$と$(n+1)^2$で展開するとnの項が消去されてるから。
Ｔ　：この考えは今までにもなかったかな。
Ｃ３：文字式で証明するときにも使った。

図６　考えのよいところという視点での対話

この比較を通し，「文字で表す場所により途中の計算が簡潔になる」という「考えのよさ」を全体で共有し，価値付けた。一方，一番小さい数を文字で表す考えについて，考えのよいところの視点で比較すると，意見がなかなか出なかった。そこで，この考えを用いて解決した生徒に「どうしてこの考えを用いたのか」を問うと，「マイナスが入ってきてしまうから自分の解きやすいプラスだけの式にしたかった」と意見が出された。これを基に，「一番小さい数を文字で表すと正の数だけで計算ができる」という「考えのよさ」を価値付けた。

(3)【手立て３】について

第４時と第７時の授業を例に述べる。まず第７時についてである。ここでは以下の問題を提示した。

２次方程式 $(x+2)^2-25=24$ の解を求めなさい。

【手立て１】,**【手立て２】**を通して「考えのよさ」に気付く過程は，次のとおりである。生徒Ａは比較前，**図７−左**のような考えをもっていた。しかし，対話や比較を通して**図７−右**の考えへと変容した。また，「２乗などのまとまり」など，式の近くに記されたメモから，生徒Ａは「必ずしも２次式＝０という形にしなくても，２乗のまとまりという式の形に着目すると簡潔に解決できる」という「考えのよさ」に気付いたと考えられる。

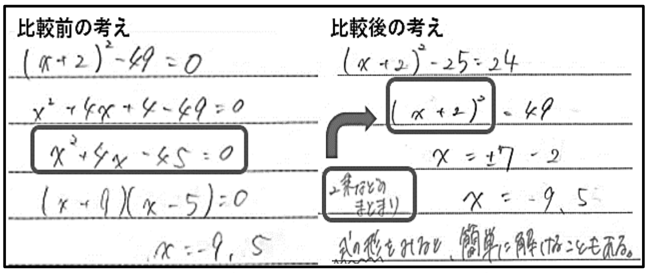


図７　生徒Ａの数学的な表現の変容

そこで，考えの有用性を実感させる場として次の問題を提示した。

２次方程式 $(x-2)^2-6=0$ の解を求めなさい。

この問題に対し，生徒Ａは，新たに気付いた２乗のまとまりをつくるという「考えのよさ」を用いる解決方法を選択した。また，授業の振り返りに「すべて展開して解いてしまうくせがあったので，式全体をちゃんと見てから判断したい」と記述した。このことから，生徒Ａは，他の生徒との対話や比較で気付いた簡潔・明瞭・的確な表現を自身の「考えのよさ」として価値付け，実際に用いることで有用性を実感したと考えられる。

解の公式と平方完成を学習した後の第４時には，自分の選択した考えと異なる考えで解答させる場を設定した。ここでは，二通りの方法で同じ問題を解く経験をさせた。授業後の振り返りの記述には，それぞれの考えを実際に用いて感じた「考えのよさ」に関する記述が見られた（**図８**）。これらには，自分

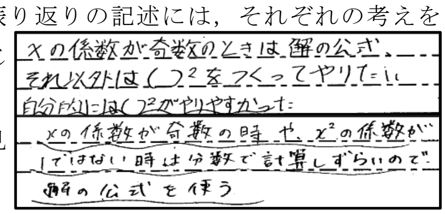


図８　有用性が記述された振り返り

が用いた「考えのよさ」だけでなく，友達の「考えのよさ」についても述べられている。また，どんな時に用いるのがよいのかという，課題解決の方法を選択する上での自分なりの判断基準も述べられている。これらの振り返りから，どうすれば簡潔・明瞭・的確に解決できるのか実感を伴って理解できたことと，「考えのよさ」の多様性に気付いたことが分かる。以上のことから，解決までの道筋を構想し，表現する上での選択肢が広がったと考えられる。

Ⅲ　研究のまとめ

１　研究の分析

本研究において「考えのよさ」に気付かせる活動を手立てとして講じた結果，解決までの道筋を構想し数学的に表現する力がどのように変化したのか検証した。

(1)　個人の変容

①　生徒Ｂの授業の様子から

解の公式について学習した時間の適用問題において，ほとんどの生徒が解の公式を用いる中，生徒Ｂは平方完成を用いて解答した。そして，生徒Ｂの振り返りには，**図９**のような記述が見られた。この記述から，生徒Ｂが解の公式を用いるという「考えのよさ」を実感しながらも，他の「考えのよさ」にも気付き，自分なりに簡潔・明瞭・的確に表現できる考えを選択したことが分かる。このことから，生徒Ｂが，解決までの道筋を構想し数学的に表現する力を高めたと考えられる。

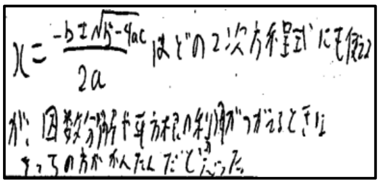
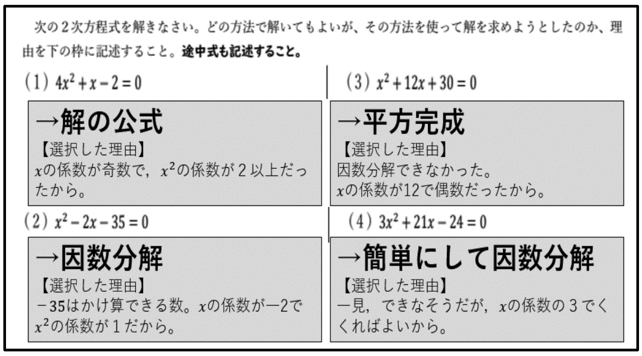


図９　生徒Ｂの振り返り

②　生徒Ｂの事前・事後テストから

実践前と実践後に，「『考えのよさ』に気付いているか」，「どのように解決の過程を表現したか」を調べるテスト※２を実施した。生徒Ｂの事後テストには，「考えのよさ」に関する記述が見られた。また，簡潔・明瞭・的確に表現できる考えを選択し，解決の過程を表現することができた（**図10**）。


次の２次方程式を解きなさい。どの方法で解いてもよいが，その方法を使って解を求めようとしたのか、理由を下の枠に記述すること。**途中式も記述すること。**

(1) $4x^2+x-2=0$

→解の公式
【選択した理由】
xの係数が奇数で，x^2の係数が２以上だったから。

(3) $x^2+12x+30=0$

→平方完成
【選択した理由】
因数分解できなかった。
xの係数が12で偶数だったから。

(2) $x^2-2x-35=0$

→因数分解
【選択した理由】
−35はかけ算できる数。xの係数が−2でx^2の係数が１だから。

(4) $3x^2+21x-24=0$

→簡単にして因数分解
【選択した理由】
一見，できなそうだが，xの係数の３でくくればよいから。

図10　生徒Ｂが選択した考えと，選択した理由

この結果から，生徒Ｂは視点を明確にした比較を繰り返すことで，「考えのよさ」を生かし，自分なりに簡潔・明瞭・的確に解決の過程を表現できるようになったことが分かる。ここからも，解決までの道筋を構想し数学的に表現することができたと考えられる。

※２　問題を解決する際に，どうしてその考えを用いたのか理由を記述させる自作のテスト。自分と他者の考えに対し，考えを選択した理由を記述する問題を出題した。

(2)　全体の変容

先のテストの結果を対象全体で検証した。すると，実践後において，解法を選択する理由の中に「考えのよさ」に関する記述が見られた生徒と，自分なりに簡潔・明瞭・的確に表現できる考えを選択し，解決の過程を表現することができた生徒が共に増加し（**図11**），ｔ検定の結果でも，共に有意差が確認できた（$p<.05$）。このことから，全体においても，解決までの道筋を構想し数学的に表現する力が高まったと考えられる。

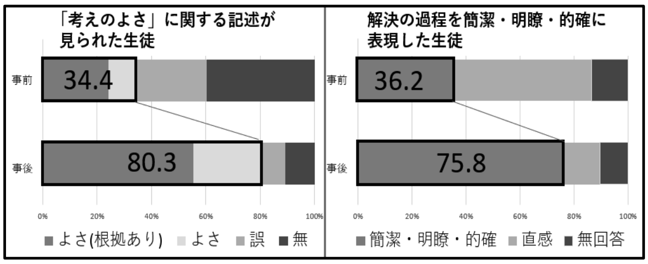


図11　事前・事後テストの結果

また，この二つのテスト結果の，相関の有無を調べたところ，0.50と正の相関※３が見られた。「考えのよさ」に気付かせる活動と，解決の過程を簡潔・明瞭・的確に表現することには，関係があることが分かった。

※３　相関係数の目安として，0.2〜0.4やや正の相関，0.4〜0.7正の相関，0.7〜強い正の相関とした。

２　成果と課題

(1)　研究の成果

働かせた数学的な見方・考え方を，視点を明確にして価値付けたことで，「考えのよさ」に気付かせることができるようになり，生徒の解決までの道筋を構想し数学的に表現する力が高まった。この力は，新たな問題解決で見通しをもって主体的に取り組むために重要になってくるものと考えられる。

(2)　研究の課題

考えのよいところという視点で比較する際に，生徒から意見が出にくい場面があった。これは，先に取り上げた考えに教師が無意識に称賛し，価値付けてしまったことが原因の一つであると考えられる。生徒が自分なりに「考えのよさ」として価値付ける場を授業の中で設定することで，新たな課題解決の場面における解決方法を構想する際の選択肢が増えると考えられる。