統合的・発展的に考察する力を育成する算数科・数学科授業の在り方（第二年次）
―「系統図」を活用した数学的な見方・考え方の成長を促す学習サイクルの工夫を通して―
田村市立大越小学校　福島県教育センター　長期研究員　佐藤　翔英
大玉村立大玉中学校　福島県教育センター　長期研究員　齋藤　真実
福島県立小野高等学校　福島県教育センター　長期研究員　白石　裕太

○「系統図」について

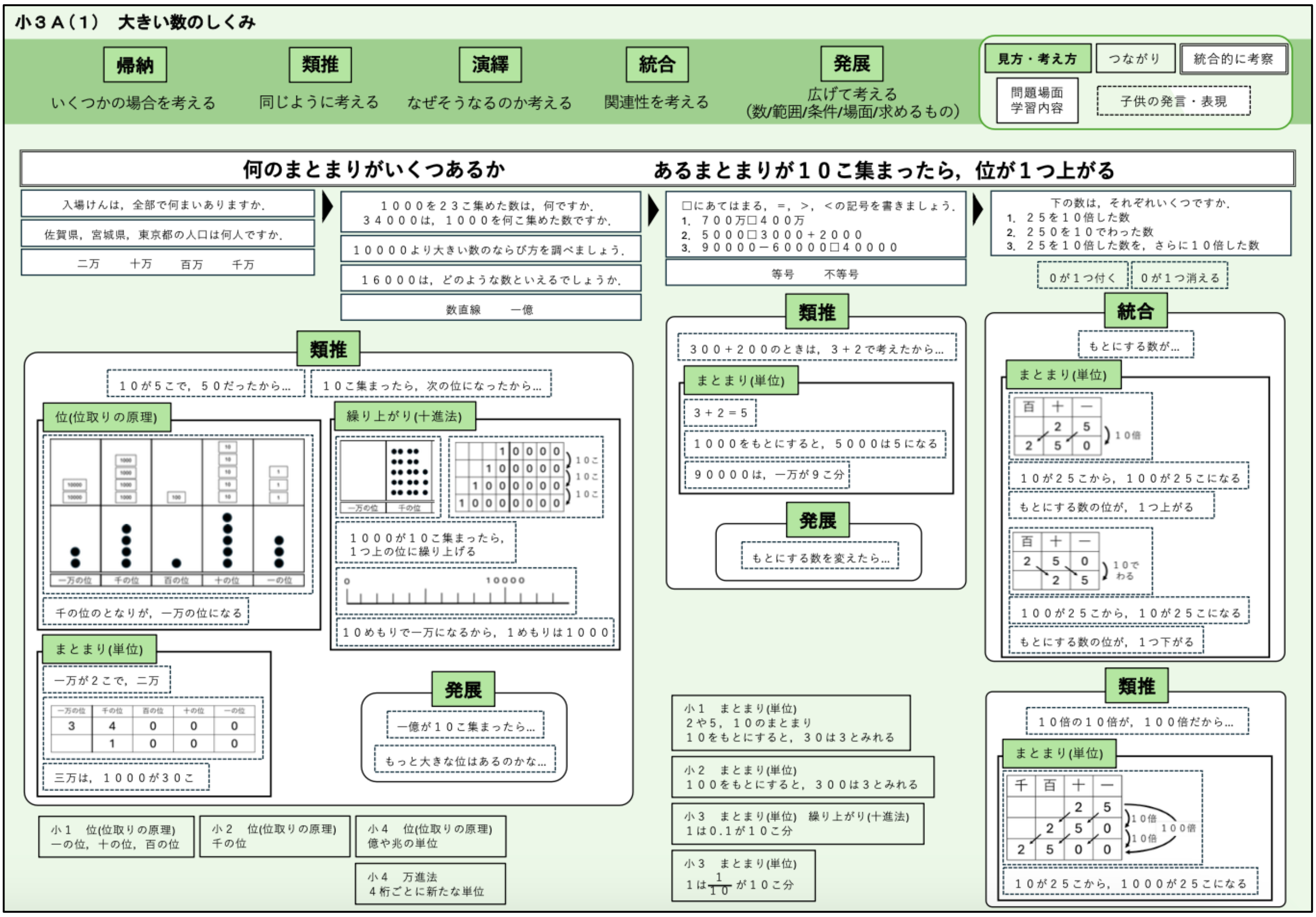
「**『数学的な見方・考え方のつながり』を探った教材研究**」を基に作成しました。

本単元で働かせる数学的な見方・考え方は何か，数学的な見方・考え方を働かせている子供はどのような姿か，働かせている数学的な見方・考え方はこれまでどのように働かせてきた経験があり，これからどのように働かせていくのか，が明記されています．

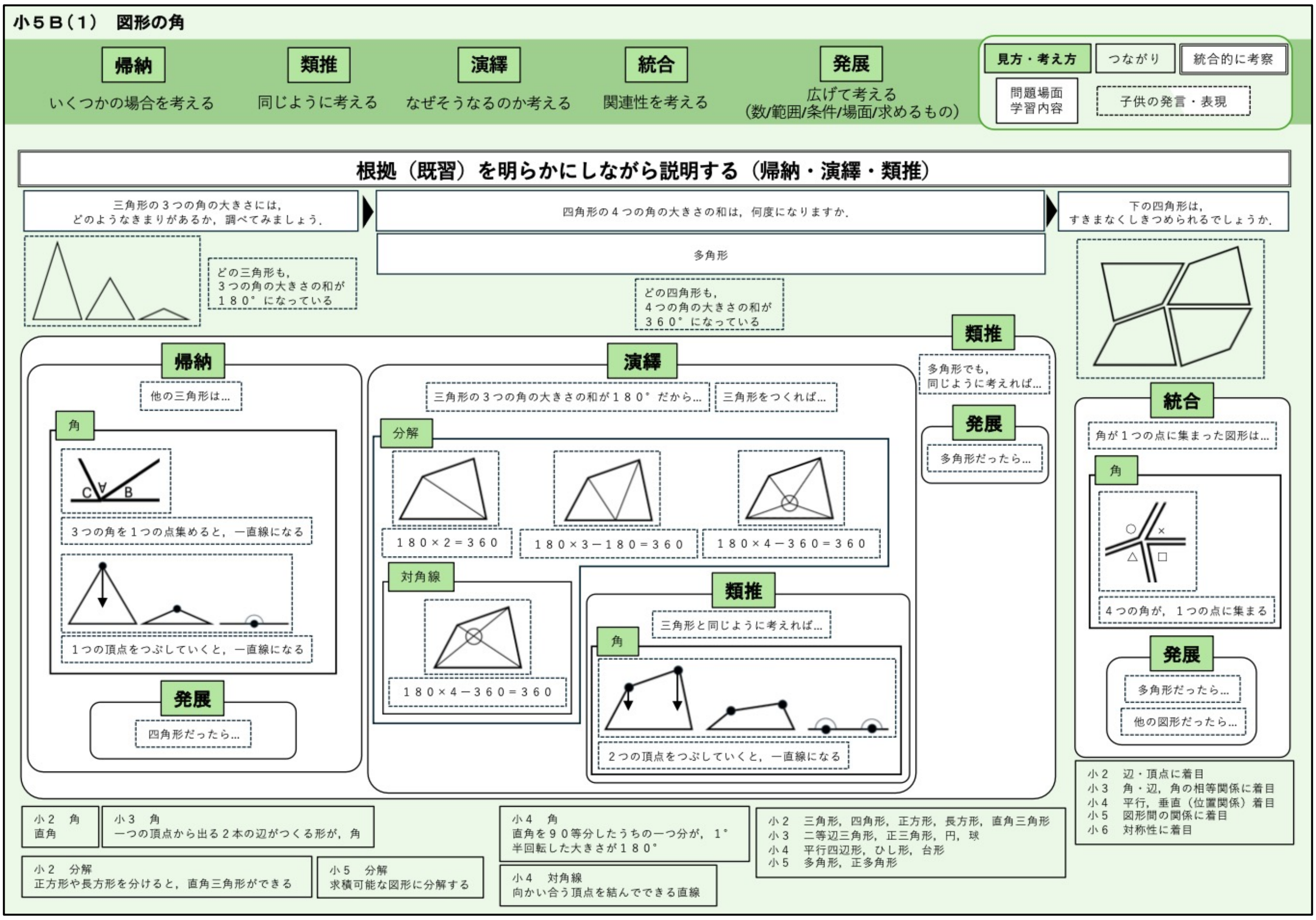
系統図には，以下の５つが記載されています。

① 見方・考え方 … 働かせる数学的な見方・考え方
② 問題場面・学習内容 … 問題場面・学習内容
③ 子供の発言・表現 … 子供の発言・表現
④ つながり … 数学的な見方・考え方のつながり
⑤ 統合的に考察 … 統合的に考察する子供の姿

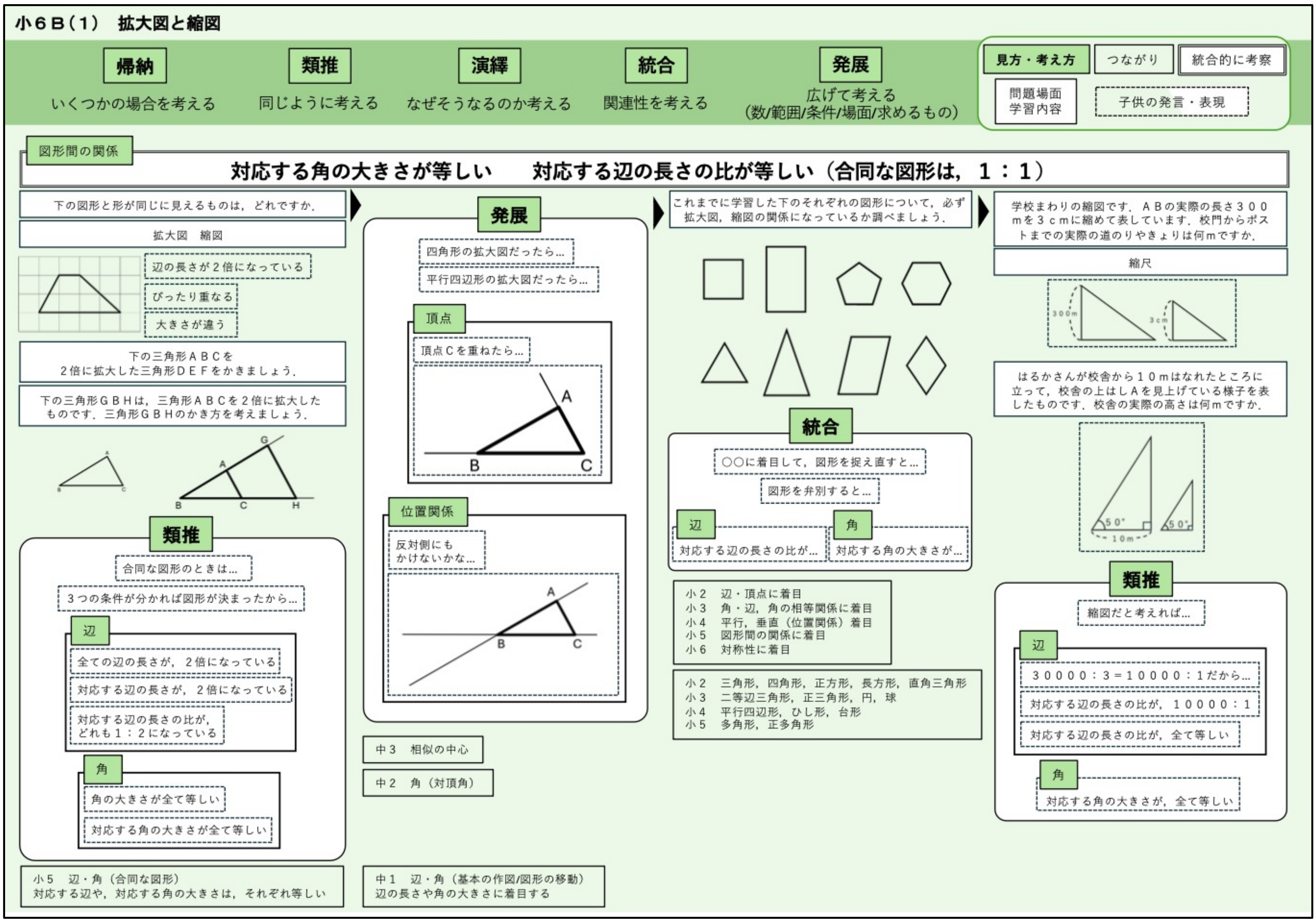
１．小学校第３学年「大きい数のしくみ」



２．小学校第５学年「図形の角」



３．小学校第６学年「拡大図と縮図」



４．中学校第３学年「２次方程式」

中3A(3)　２次方程式

帰納	類推	演繹	統合	発展
いくつかの場合を考える	同じように考える	なぜそうなるのか考える	関連性を考える	広げて考える（数/範囲/条件/場面/求めるもの）

見方・考え方　つながり　統合的に考察
問題場面 学習内容　子供の発言・表現

２次方程式とその解の意味

統合
文字の種類や次数によって方程式は分類されている。１次方程式や連立方程式と同じように，方程式を成り立たせる文字の値を解という。

方程式$x(8-x)=14$の特徴は？

発展(条件)　次数　式の形
１次方程式の次数が増えている
(2次式)＝0の形に変形できる方程式を２次方程式という。

統合(1次方程式/連立方程式)
方程式を成り立たせる文字の値の組が解

２次方程式の解き方

統合　既習の解き方に帰着するために目的をもって式を変形し，2次方程式が解ける。（平方根の考え/因数分解/1次方程式）
どんな２次方程式でも，$(x+p)^2=q$の形に直せば解ける。/ どんな２次方程式でも，解の公式を使えば解ける。／式の形に着目して，適当な方法で解くことができる。

因数分解を使った解き方

統合　左辺が因数分解できれば　1次方程式の形にして解ける。

$(x-1)(x+6)=0$

因数分解の考え
A × B ＝0ならば
A ＝ 0またはB=0
$x-1=0$または$x+6=0$

・$x^2-2x=0$
・$x^2-6x+5=0$
・$x^2+6x+9=0$
・$x^2-25=0$

式の形
左辺が因数分解できれば、因数分解の考えが使える
既習の考え（因数分解）
共通因数をくくり出す
乗法公式を使う

発展(条件)
因数分解ができないときは？

平方根の考えによる解き方

統合　いつでも$(x+p)^2=q$の形に直せば　平方根の考えを使って解ける。

$x^2-3=0$

平方根の考え
$x^2=●$
2乗して●になる数
xは●の平方根
$x=\pm\sqrt{●}$

$(x+2)^2=5$

$x^2=●$の形なら解ける
式の形（既習の形）
$x^2=●$の形に直す
$x+2$をAとすると
$A^2=5$
$A=\pm\sqrt{5}$
$x+2=\pm\sqrt{5}$
$x=-2\pm\sqrt{5}$
平方根の考えを使えば，あとは1次方程式の解き方と同じだ

$x^2+6x-1=0$

$(x+▲)^2=●$の形なら解ける
式の形（既習の形）
$(x+▲)^2=●$の形に直す
$x^2+6x=1$
$x^2+6x+9=1+9$
$(x+3)^2=10$
式の形（係数）
bが奇数だと式変形が複雑で大変

発展(条件)
式変形が大変なときもっと効率よく解く方法はある？

解の公式を使った解き方

統合　$ax^2+bx+c=0$の形に整理すれば　解の公式で解ける。

$3x^2+5x+1=0$

公式の考え
$ax^2+bx+c=0$
$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
式の形（係数）
aが１以外のときや，bが奇数のときは解の公式が効率的

類推(具体)
具体的な数の場合と同じように解けば公式ができる

発展(条件)
これまでの解き方の使い分け方は？

いろいろな２次方程式

・$3x^2+8x+2=0$
・$x^2+4x-12=0$
・$x^2+12x+30=0$
・$x^2-49=0$
・$3x(x-2)+4=x^2$

式の形（係数）
式の形に着目して，解き方を使い分ければよい。
例)
・(２次式)=0の形にする
・左辺が因数分解できるなら因数分解の解き方
・aが１以外なら解の公式
・xの係数が偶数なら平方根の考え

中1　方程式とその解の意味
代入する値によって成り立ったり成り立たなかったりする等式
成り立たせる文字の値が解

中2　連立方程式とその解の意味
2つ以上の方程式を組み合わせたもの
組み合わせたどの方程式も成り立たせる文字の値の組が解

中1　１次方程式の意味
(１次式)=0の形に変形できる方程式

発展(文字の種類)

中2　2元１次方程式の意味
2つの文字をふくむ１次方程式

数Ⅰ　１次不等式，２次不等式

小3　乗法の性質
分配法則
$(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

中2　連立方程式の解き方
１つの文字を消去して１元１次方程式に帰着させる

中3　乗法公式
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
$(x\pm a)^2=x^2\pm 2ax+a^2$
$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

発展(条件)

数Ⅰ　２次の乗法公式
$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

発展(条件)

数Ⅱ　３次の乗法公式、二項定理

中3　式の形(既習の形)
$(a+b)(c+d)$
$=M(c+d)$
$=Mc+Md$

中1　等式の性質
$a=b$ならば$a+c=b+c$
$a=b$ならば$a-c=b-c$
$a=b$ならば$ac=bc$
$a=b$ならば$\frac{a}{c}=\frac{b}{c}(c\neq 0)$

数Ⅰ　２次関数のグラフ
平方完成によって式を変形することで，グラフの頂点の座標や軸を求める

小4　公式の考え

５．中学校第３学年「関数$y=ax^2$」

中3C(1)　関数$y=ax^2$

帰納	類推	演繹	統合	発展
いくつかの場合を考える	同じように考える	なぜそうなるのか考える	関連性を考える	広げて考える（数/範囲/条件/場面/求めるもの）

見方・考え方　つながり　統合的に考察
問題場面 学習内容　子供の発言・表現

変化の特徴 対応の特徴　**統合**　２乗に比例する関数の特徴は，既習の関数と同じように，表，式，グラフを関連付けながら見いだすことができる。
表では，表の縦，横，間，式では式の形や比例定数，グラフでは，グラフの形や開き方に着目して変化のようすを考える。

関数$y=ax^2$

ジェットコースターが斜面を下りるときの進むようすは？詳しく調べてみよう

関数関係

関数関係
時間が決まれば、距離はただ１つに決まる→距離は時間の関数

統合（関数関係）
比例や反比例、１次関数と同じように、一方が決まればもう一方もただ１つに決まるから、球が進む距離は、球が転がった時間の関数である。

比べる（既習の関数）
だんだん速くなる
進む距離は一定ではない
グラフは原点を通る
グラフは曲線になる
→新しい関数になっている

類推(既習の関数)
既習の関数と同じように、表から特徴を見いだせないかな？

表

類推（比例：表の横／表の縦／表の間）

表の横（変化の特徴）

x	0	1	2	3	4	…
y	0	0.2	0.8	1.8	3.2	…

xがm倍になれば，yはm^2倍になる

発展(逆)
yがm倍のときxは何倍だろう？

表の縦（対応の特徴）

x	0	1	2	3	4	…
x^2	0	1	4	9	16	…
y	0	0.2	0.8	1.8	3.2	…

・x^2をXと見ればyはXに比例している
→ yはxの2乗に比例している
・xを2乗して0.2をかけるとyになる
→ $y=0.2x^2$

表の間（変化の割合）

x	$0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2 \xrightarrow{+1} 3$	…
y	$0 \xrightarrow[+0.2]{} 0.2 \xrightarrow[+0.6]{} 0.8 \xrightarrow[+1.0]{} 1.8$	…

一定の割合で増加していない

式

類推(比例)
表の縦（対応の特徴）　式の形（対応の特徴）
表の縦の関係から式をつくることができる
$y=ax^2$
で表されるとき，yはxの2乗に比例するという

発展(表現［グラフ］)
変化のようすをグラフで見ると？

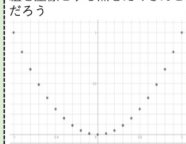
発展(表現［変化の割合］)
変化のようすを変化の割合で考えると？

関数$y=ax^2$の性質と調べ方

関数$y=ax^2$の性質を調べてみよう

グラフ

類推(既習の関数)
既習の関数と同じように，表をもとに，xとyの値の組を座標とする点をたくさんとれば，グラフがかけるだろう



単純化(aが1の場合)
$y=x^2$

比べる（既習の関数）
・原点を通る
・なめらかな曲線
・y軸について対称

類推(既習の関数)　**発展(条件)**　**帰納(比例定数a)**　**統合(グラフの形)**
既習の関数と同じように，aの値を変えてグラフの特徴をもっと詳しく調べられないかな？

比べる　比例定数(a)
・共通点･･･原点を通る曲線(放物線)
y軸について対称
・相違点･･･グラフの向き，グラフの開き具合
・$a>0$上に開く，　$a<0$下に開く
・$a>0$最小値をとる，　$a<0$最大値をとる
・aの絶対値が大きいほど開き方が小さい
・aの絶対値が小さいほど開き方が大きい

発展(表現［表］)

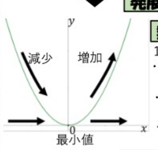
関数$y=ax^2$の値の変化

類推(１次関数)
１次関数と同じように，xが１増加するときのyの増加量を調べれば，変化の特徴が見えるのではないか
【$y=2x^2$】

x	…	$-2 \xrightarrow{+1} -1 \xrightarrow{+1} 0 \xrightarrow{+1} 1 \xrightarrow{+1} 2$	…
y	…	$8 \xrightarrow{-6} 2 \xrightarrow{-2} 0 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+6} 8$	…

減少　最小値　増加

発展(表現［グラフ］)



類推(１次関数)
1次関数と同じように
・xが増加することは
グラフでは右に進むこと
・yが増加することは
グラフでは上に進むこと
・yが減少することは
グラフでは下に進むこと

発展(条件)
aの値を負の数に変えたら･･･
類推(aが正の場合)
aが正の場合と同じように表やグラフで調べられるだろう

類推(１次関数)　**発展(表現［変化の割合］)**
1次関数と同じように，変化のようすを変化の割合に着目して考えられないかな

中1　関数関係　関数関係
Aが決まるとBがただ１つに決まる→BはＡの関数である

小6　比例の性質　表の横（変化の特徴）
比例：xの値が2倍，3倍…になると，
yの値も2倍，3倍…になる

表の間（変化の割合）
中2　１次関数の変化のようす
xが1増加するとき，yはa増加する
xがk増加するとき，yはak増加する

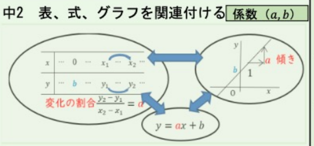
小6　比例の性質　表の縦（対応の特徴）
$y\div x=$決まった数　→$y=$(決まった数)× x

表の縦（対応の特徴）　式の形（対応の特徴）
中1　比例
$y=ax$の式で表されるときyはxに比例する

中2　１次関数　式の形（対応の特徴）
yがxの１次式で表されるときyはxの１次関数である。→ $y=ax+b$

数Ⅰ　２次関数　式の形（対応の特徴）
yがxの2次式で表されるときyはxの2次関数である。→ $y=ax^2+bx+c$

統合
中2　表、式、グラフを関連付ける　係数（a,b）



数Ⅰ　２次関数のグラフ　係数（a,b,c,p,q）
式とグラフを関連付けて考察する

中1　比例　変化の特徴（グラフ）　比例定数(a)
グラフの形，増減

中2　１次関数　変化の特徴（グラフ）　変化の割合
グラフの形，増減，変化の割合

変化の特徴（グラフ）
数Ⅰ　２次関数の最大値，最小値

6．高等学校 数学Ⅰ 「２次関数の値の変化：２次関数の最大・最小」

高校　数学Ⅰ（3）２次関数の値の変化：２次関数の最大・最小

帰納 いくつかの場合を考える　**類推** 同じように考える　**演繹** なぜそうなるのか考える　**統合** 関連性を考える　**発展** 広げて考える（数/範囲/条件/場面/求めるもの）

見方・考え方　つながり　統合的に考察　問題場面 学習内容　子供の発言・表現

関数の最大値・最小値を求めるには，グラフの頂点や軸に着目しながら，関数の値の変化を調べればいい。

２次関数の最大値・最小値

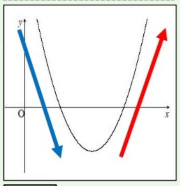
次の２次関数の最大値・最小値を求めよ。
$y=(x-2)^2+1$　，$y=-(x-1)^2+5$

帰納
$x=1$なら…
$x=2$なら…

変化（グラフ）
グラフの中で，最も高い点が最大，最も低い点が最小である。

変化（増減）
２次関数は頂点を境に，増減が変わる。

変化（頂点）
頂点がグラフの中で，最も低い（高い）位置にある。



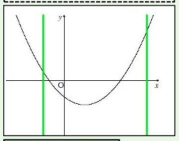
統合
２次関数は，頂点で最大値または最小値をとり，どちらか一方はない。

発展（条件）

定義域に制限がある２次関数の最大値・最小値

２次関数 $y=x^2-2x-2\ (-1\leqq x\leqq 4)$ の最大値・最小値を求めよ。

類推
グラフが下に凸だから，頂点で最小値をとるのではないか。



発展（定義域）
定義域を変えて，最大値・最小値を考えてみると…。

変化（軸）
軸が，定義域に含まれる場合は，頂点で最小値をとるが，軸が定義域に含まれない場合は，頂点で最小値をとらない。
軸が定義域に含まれるかどうかで，最小値が変わる。

類推（軸 / 最大・最小）
グラフが上に凸なときも，軸が定義域に含まれるかどうかで考えればいい。

２次関数の利用

長さ８ｍのロープを，コの字に張って長方形の花壇をつくる。花壇の面積が最大となるときの縦の長さを求めよ。
また，そのときの面積を求めよ。

帰納
花壇の縦の長さを具体的に考えて，面積が最大となるときを考えると…
縦が１ｍなら…
縦が２ｍなら…

関数関係
縦の長さを定めると，面積が定まるから，面積は縦の長さの関数であるといえる。
縦の長さを x ｍ，面積を y m^2 とすると…。

類推
面積を２次関数の式で表せれば，グラフをかいて，最大値を求められそう…。

発展（数 / 条件）
ロープの長さが変わると…。
花壇の形が長方形ではなく，別の形に変わると…。

統合
２つの数量が，関数の関係にあれば，文字を用いて，式で表したり，グラフをかいたりして，問題を解決できる。
定義域を考える必要がある。

変化（増減）

中１　比例・反比例
比例の場合は $a>0$（$a<0$）のとき，xの値が増加すると，yの値は増加（減少）する。
反比例の場合は，xの値が増加すると，yの値は減少（増加）する。

中２　１次関数
$a>0$（$a<0$）のとき，xの値が増加すると，yの値は増加（減少）する。
変化の割合は一定である。

中３　関数 $y=ax^2$
xの値が増加すると，yの値は，$a>0$（$a<0$）のとき，原点を境に，減少（増加）から増加（減少）へと変わる。

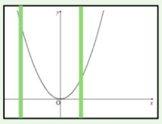
数学Ⅱ　指数関数・対数関数
底の値 aによって，変化の特徴が異なる。
$a>1$ のときと $0<a<1$ のときで分けて考える。

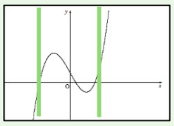
数学Ⅱ　微分と積分の考え
増減が変わる点における接線の傾きが０である。

変化（変域）

中３　関数 $y=ax^2$
変域に $x=0$ が含まれるかどうかで考える。

数学Ⅱ　微分と積分の考え
定義域に極値が含まれるかどうかで考える。





関数関係

小６　比例
比例の関係にあるとみることで，数量を調べることができる。

中２　１次関数
２つの数量の関係を１次関数とみなすと，問題を解決したり，予想したりすることができる。

数学Ⅱ　微分と積分の考え
２つの数量の関係に着目して，微分や積分の考えを用いることで，問題を解決したり，予想したりすることができる。

7．高等学校 数学Ⅰ 「２次関数の値の変化：２次関数と２次方程式・２次不等式」

高校　数学Ⅰ（3）２次関数の値の変化：２次関数と２次方程式・２次不等式

帰納 いくつかの場合を考える　**類推** 同じように考える　**演繹** なぜそうなるのか考える　**統合** 関連性を考える　**発展** 広げて考える（数/範囲/条件/場面/求めるもの）

見方・考え方　つながり　統合的に考察　問題場面 学習内容　子供の発言・表現

方程式や不等式の解を求めるには，式とグラフとの関係に着目すればいい。

２次方程式の解と２次関数のグラフとの関係

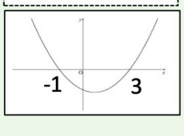
２次関数 $y=x^2-2x-3$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標を求めよ。

式とグラフとの関係
２次方程式の解が２個のとき，グラフと x 軸との共有点も２個。
方程式の解と関係があるかもしれない…。

変化（表）
yの値が０となるのは，xの値が－１と３のときである。

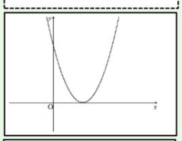
x	…	-1	…	3	…
y	…	0	…	0	…

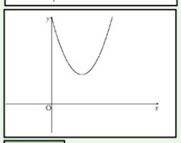
変化（グラフ）
$x=-1,3$ がグラフと x 軸との共有点の x 座標である。



式とグラフとの関係
２次方程式の解と，グラフと x 軸との共有点の x 座標が一致している…。

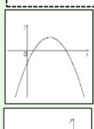
発展（共有点）
２次関数のグラフと x 軸との共有点の個数が，１個や０個だったら…。

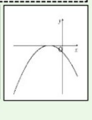


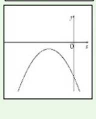


類推
共有点が２個の場合と同じように，方程式の解と，グラフと x 軸との共有点の x 座標が一致するかどうかを考えればいい。

発展（グラフの向き）
グラフが上に凸なら…。







統合
方程式の解は，グラフと x 軸との共有点の x 座標と一致する。
方程式の解の個数は，グラフと x 軸との共有点の個数と一致する。

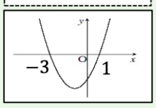
２次不等式の解と２次関数のグラフとの関係

２次不等式 $x^2+2x-3>0$ の解を求めよ。

類推
１次不等式の解を求めたときと同じように，まずは方程式の解を求めればいいのではないか…。

式とグラフとの関係
方程式の解は，グラフと x 軸との共有点の x 座標に一致するから…。

変化（グラフ）
$x=-4$ や $x=2$ のときは，グラフが x 軸よりも上側にあるから，y の値は０より大きい。
$x=-2$ や $x=0$ のときは，グラフが x 軸よりも下側にあるから y の値は０より小さい。

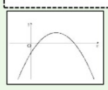


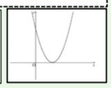
変化（表）
値の変化を表でまとめると，x の値が－３より小さいか１より大きいとき，yの値は０より大きい。xの値が－３より大きく１より小さいとき，yの値は０より小さい。

x	…	-3	…	1	…
y	+	0	−	0	+

式とグラフとの関係
グラフの x 軸より上側にある部分が，$y>0$ を満たす範囲。
グラフの x 軸より下側にある部分が，$y<0$ を満たす範囲。

発展（グラフの向き / 共有点）
グラフが上に凸なら…。
グラフと x 軸との共有点が１個や０個なら…。





統合
不等式の解は，グラフと x 軸との位置関係から考えられる。

式とグラフとの関係

中２　１次関数
２元１次方程式を成り立たせる x, y の値の組を座標とする点をとると，１次関数のグラフになる。

中２　１次関数
連立方程式の解は，それぞれの方程式のグラフの交点の座標と一致する。
二つの方程式のグラフが平行なとき，グラフは交わらないから，連立方程式の解はない。

数学Ⅱ　いろいろな式
数の範囲を複素数まで拡張すれば，２次方程式は，２次関数のグラフと x 軸との共有点がない場合でも，解をもつ。

数学Ⅱ　図形と方程式
座標平面上の直線は，２元１次方程式で表すことができる。

数学Ⅱ　図形と方程式
円の中心の座標と，半径に着目すれば，円を方程式で表すことができる。

数学Ⅱ　図形と方程式
連立方程式を解けば，円と直線や，２つの円の共有点の座標が求められる。

数学Ⅱ　図形と方程式
軌跡や領域は，方程式や不等式を満たす点の集合である。

数学Ⅱ　微分と積分の考え
３次関数のグラフと x 軸との共有点の x 座標が，３次方程式の解と一致する。