

既習の知識及び技能を活用する力を育成する高等学校数学科の指導

—知識及び技能を体系的に整理することを通して—

長期研究員 鈴木 謙太郎

《研究の要旨》

本研究は、高等学校数学科において、既習の知識及び技能を活用する力を育成することを目指したものである。活用する力を育成するためには数学的活動を充実させることが重要であるため、特に、事象を数学化したり解決過程を振り返ったりする過程の遂行に向け、知識及び技能を体系的に整理することとした。その結果、生徒が主体的、協働的に学習過程を遂行する姿が見られ、体系的に整理した知識及び技能を活用し問題を解決することができた。

I 研究の趣旨

高等学校学習指導要領解説数学編では、PISA2015 数学的リテラシーについて、トップレベルの国や地域に比べて上位層の割合が低いことが課題として挙げられ、数学の知識及び技能を活用する力を育成する必要性が示唆された。その課題解決に向け、小中高と一貫して、算数・数学科の目標の中で、数学的活動^{※1}を通して数学的に考える資質・能力を育成すると明示された。また、数学的活動として捉える学習過程も図で明示された（図1）。この図が示す学習過程のサイクル化と充実が、数学的な見方・考え方を豊かにし、数学的に考える資質・能力の育成につながることで、つまり、数学の知識及び技能を活用する力の育成につながることも示されている。

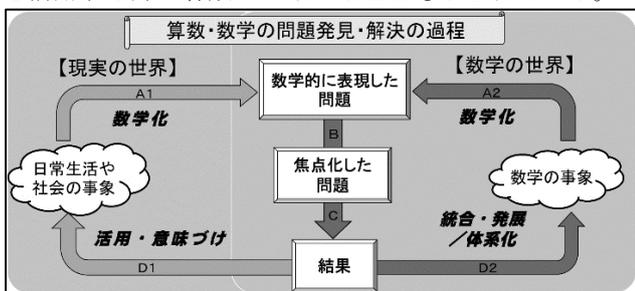


図1 数学的活動として捉える学習過程のイメージ

これまでの自身の指導を振り返ると、問題を解決して結果を得る過程を重視していたため、問題演習を中心とした指導に偏ってしまっていた。そのため、事象を数学化したり、解決過程を振り返って体系化したりする過程を十分に遂行できていなかった。このことから、自身の喫緊の課題は、体系的に整理することにより、知識及び技能を次の問題解決に生きるものとして習得させることであると明らかになった。

そこで、本研究では、数学的活動の充実に向け、知識及び技能を体系的に整理することに焦点を当てる。まず、事象を数学化する過程の充実に向け、単元の学習に生きる既習事項^{※2}を明確にする。次に、解決過程を振り返る過程の充実に向け、新たに獲得した知識及び技能と既習

の知識及び技能とを関連付けて捉えられるようにする。これらを踏まえて、獲得した知識及び技能と既習の知識及び技能とを合わせて体系的に整理し、知識及び技能を次の問題解決に生きるものとして習得できるようにすることで、本主題に迫ることとする。

※1 数学的活動とは、事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行することである。
※2 既習事項とは、既に生徒が獲得した知識及び技能、見方・考え方、学習・生活経験等とする（平成23年度 福島県教育センター 研究紀要）。

II 研究の概要

1 研究仮説

高等学校数学科の指導において、以下の手立てを講じれば、既習の知識及び技能を活用する力を育成することができるだろう。

【手立て1】単元の学習に生きる既習事項の確認

【手立て2】獲得した知識及び技能と既習の知識及び技能の関連付け

【手立て3】知識及び技能の体系的な整理

2 研究の内容

(1) 【手立て1】単元の学習に生きる既習事項の確認

数学の事象を数学化する過程において、本単元や本時の学習に生きる既習事項を生徒から引き出す。本単元や本時の数学の事象につながる復習問題に取り組みせたり、数学の事象の与え方を工夫したりすることで、既習事項における数学的な見方・考え方の働かせ方を想起させ、既習事項を確認する。

(2) 【手立て2】獲得した知識及び技能と既習の知識及び技能の関連付け

解決過程を振り返る過程において、獲得した知識及び技能と既習の知識及び技能とを関連付けて捉える場面を設定する。その際、獲得した知識及び技能と既習の知識及び技能との類似点や相違点を明らかにし、「学びのダイアグラム」^{※3}（以下、「学びのDGJ」）にまとめさせる。

※3 「学びのダイアグラム」とは、獲得した知識及び技能とそれに関連する既習の知識及び技能をまとめるための、本研究独自のワークシートである。小単元ごとに1枚の紙面にまとめ、学習内容を一目で振り返ることができる。

(3) 【手立て3】 知識及び技能の体系的な整理

知識及び技能が次の問題解決に生きるものとして習得されるよう、獲得した知識及び技能と既習の知識及び技能とを合わせて体系的に整理する場面を設定する。体系的に整理するとは、条件を変えたり適用範囲を広げたりすることで、知識及び技能を新たに捉え直すことである。体系的な整理が促されるよう、【手立て1】で確認する既習事項の選択や、【手立て2】でのまとめ方を工夫する。

3 研究の実際

対象生徒	2年次生17名（1学級）
授業実践Ⅰ	数学Ⅱ「いろいろな式」（13時間）
授業実践Ⅱ	数学Ⅱ「図形と方程式」（13時間）

(1) 授業実践Ⅰ 数学Ⅱ「いろいろな式」

① 【手立て1】について

単元の導入では、高次方程式の解決に生きる既習事項を確認する。ここで生徒から引き出したい既習事項は、二つである。一つは、二次方程式を解くことに関する知識及び技能、もう一つは、二次方程式は因数分解することで一次方程式に帰着することができるという数学的な見方・考え方である。

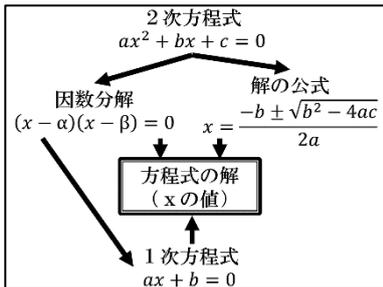


図2 既習事項の確認

これらを引き出すため、「二次方程式を活用して解くことのできる復習問題」に取り組みさせた。生徒が得た解決結果とその過程を振り返り、既習事項を図2のよ

うにまとめた。この図は、【手立て2】でまとめる「学びのDG」のイメージを共有するものであり、同時に、既習事項を一目で確認できるものである。

第8時の導入では、「三次方程式 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 」（数学の事象）の提示の際、生徒は、図2を確認しながら「解の公式は知らない」、「因数分解すれば解ける」という意見を出した。このことから、単元の導入で確認した既習事項が、数学の事象を数学化する際に生かされていることがうかがえる。ここで、出された意見に基づき、「 $x = 2$ を解にもつ三次方程式 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ を因数分解によって解こう」という問題（数学的に表現した問題）の解決に進むことができた。

② 【手立て2】について

【手立て1】により、 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ が $(x - 2)(x$ の二次式)という形に変形できると気付いた生徒は、 $(x - 2)(x^2 - 4x + 3)$ と因数分解し、三次方程式を一次方程式や二次方程式に帰着させて解くことができた。

図2で確認した既習事項と第8時で獲得する知識及び技能がつながる場面である。ここでは、三次方程式を一次方程式や二次方程式にさらに関連付けることをねらい、解決過程を振り返る場面を設定した。まず、三次方程式はなぜ解くことができたのかを問うと、生徒からは「因数分解したから」という意見が出された。次に、因数分解することによってなぜ解くことができたかを踏まえ、三次方程式を解くことについて「学びのDG」にまとめさせると、図3のようになった。二次方程式が因数分解によって一次方程式に帰着できた図2との類似点を見だし、三次方程式は一次方程式や二次方程式に帰着できると関連付けることができた。

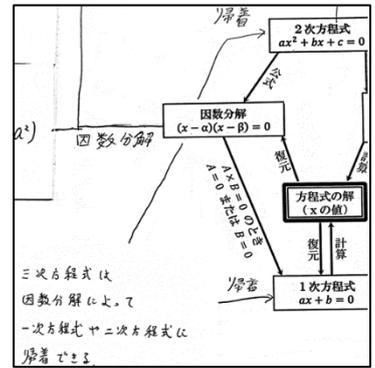


図3 方程式の関連付け

その後、第9時で複二次方程式を解くことについて学習すると、図3と同様に、「一次方程式や二次方程式に帰着できる」とまとめることができた。高次方程式を解くことについて、体系的に整理する上での重要な気付きを得ることができた。

③ 【手立て3】について

第12時では、高次方程式を解くことについて、体系的に整理する場面を設定する。三次方程式や複二次方程式を解くことは、前時までの適用範囲を広げることである。その際、一次方程式や二次方程式に帰着するという数学的な見方・考え方を働かせながら整理することができた。さらに、方程式の次数をさらに変化させ、四次方程式へと適用範囲を広げて、知識及び技能を新たに捉え直すことができた生徒もいた（図4）。

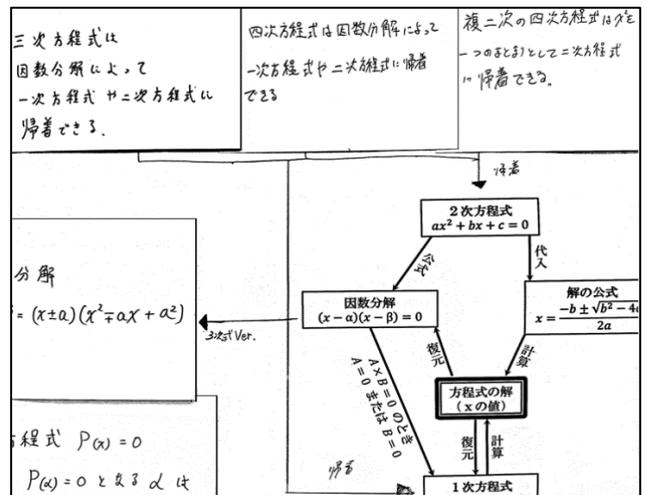


図4 高次方程式を解くことの体系的な整理

(2) 授業実践Ⅱ 数学Ⅱ「図形と方程式」

① 【手立て1】について

第8時の導入では、円と直線の位置関係の考察に生きる既習事項を確認する。ここで生徒から引き出したい既習事項は、図形の位置関係が共有点の個数によって分類できるという数学的な見方・考え方である。これは、円と直線の位置関係についての知識及び技能を体系的に整理する上で、重要である。

これを引き出すため、図形描写アプリを用いて、円と直線を電子黒板に提示し、直線の位置を動かしたり円の半径の長さを変化させたりした（数学の事象）。

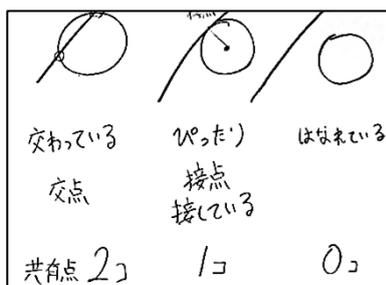


図5 数学の事象の数学化

生徒は、その変化を観察する中で、共有点の個数に着目して図5のように円と直線の位置関係を分類した。数学の事象の与え方を工夫することで、既習事項を引き出すことができた。

ここで、図5の分類に基づき、「円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $2x - y + 5 = 0$ の位置関係を求めよう」という問題（数学的に表現した問題）の解決に進むことができた。

② 【手立て2】について

生徒は、個人で主体的に、あるいはグループで協働的に問題の解決に向かった。本時では、連立方程式によって共有点の座標を求める方法（図6-左）と、円の中心から直線までの距離と円の半径の大小の比較によって求める方法（図6-右）の二つの解答が得られた。

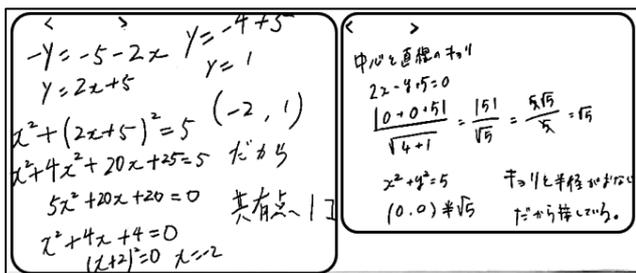


図6 問題の解決過程と結果

【手立て1】により確認した既習事項と第8時で獲得する知識及び技能がつながる場面である。ここでは、円と直線の共有点の個数と、二次方程式の判別式 D の符号とが関連付けられるようにすることをねらい、連立方程式による解決過程を振り返る場面を設定した。まず、教師と生徒の対話を通して、共有点の個数さえ分かれば解決できることを確認した。次に、共有点の個数は解決過程のどの時点で判断できるかを問い、二次方程式に着目さ

せた。これらを踏まえて、円と直線の共有点の個数を判別することについて、「学びのDG」にまとめさせると、生徒Aは図7-左のようにまとめた。記述を見ると、共有点の個数と判別式 D の符号を関連付けてまとめていることが分かる。解決過程と二次方程式の解の判別に関する既習事項との類似点を見だし、判別式 D の符号と関連付けてまとめることができた。

この後、本時で獲得した知識及び技能を確かめるため、直線の方程式を変えた問題に取り組みさせた。生徒Aの解答を見ると、判別式 D の符号を用いて問題を解決している（図7-右）。円と直線の共有点の個数と判別式 D の符号とを関連

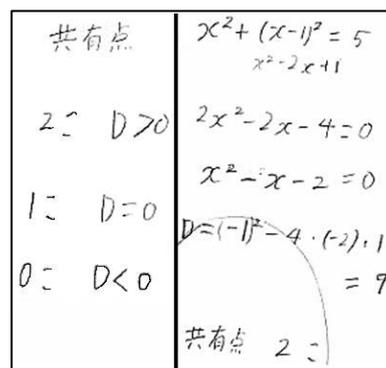


図7 共有点の個数と判別式の関連付けができたことがうかがえる。

③ 【手立て3】について

授業の終わりに、円と直線の位置関係について体系的に整理する場面を設定する。本時で解決した問題の結果は、円と直線の共有点の個数が一つという条件であった。生徒たちは、この条件を変化させ、判別式 D の符号による判別の方法や、円の中心と直線の距離 d と円の半径 r の大小の比較による判別の方法について、適用範囲を広げた。その結果、多くの生徒が図8のように体系的に整理してまとめることができた。授業の導入で三つに分類した円と直線の位置関係に基づいて、知識及び技能を新たに捉え直すことができた。

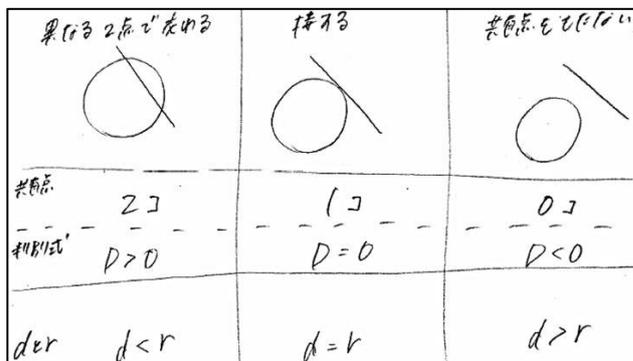


図8 円と直線の位置関係の体系的な整理

Ⅲ 研究のまとめ

1 研究の検証

(1) 授業の様子から

授業実践Ⅱの第10時では、単元で獲得した知識及び技

能を活用して解くことのできるいくつかの問題に取り組みさせた。図9は、その授業で「ある直線に接する円の半径を求める

C1: (問題を指さしながら)ここに壁が…
T: 問題にはどんな条件があるの。
C1: 半径がr。
(体系的に整理した「円と直線の位置関係」を振り返り)
これ、接するときはd=rだ。
C2: (点と直線の距離の公式で計算して)
距離dは2。中心と直線の距離。
C1: じゃあ、半径rは2だ。

図9 知識及び技能を活用している場面
問題」に取り組む生徒と教師の対話である。体系的に整理した円と直線の位置関係を振り返りながら、問題で問われている条件に基づき、解決することができている。

単元導入時、生徒は提示された問題に対して教師の支援を待つだけであったが、実践が進むにつれて主体的、協働的に解決に向かう姿が見られるようになった。体系的に整理することに焦点を当て、充実した数学的活動を繰り返すことで、数学的な見方・考え方が豊かになり、知識及び技能を活用する力が向上した(図10)。

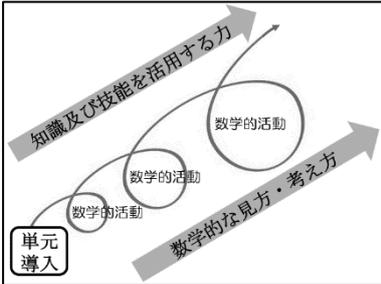


図10 活用する力の向上

(2) 質問紙調査から

実践の前後に、質問紙調査を実施した。

図11は、「問題解決に、もっている知識などを活用しているか」という質問(4件

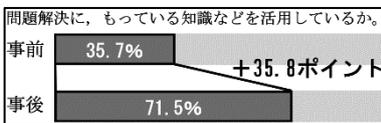


図11 活用している実感の変化

法)の回答を、肯定群と否定群に分けて集計した結果である。肯定群が35.8ポイント増加したことから、問題解決の際、知識などを活用している実感をもつ生徒が増加していると分かる。体系的に整理することで知識及び技能が明確化し、活用しながら主体的、協働的に問題解決に向かうことができた結果と考えることができる。

また、「知識などを体系的に整理することについてどう思うか」という質問(自由記述式)に対し、

○知識のつながりを考えることで、普段の学習の中で自分から使えるようになる。
○習った知識を他の知識とつなげることが出来るか考えるのはとても大切。
○問題を解くには、習った様々な知識を掛け合わせる必要もあるので、関係を捉えるのは大事。
●よく分からない。
●あまりできなかった。

図12 体系的に整理することへの生徒の意見

図12のような回答が得られた。知識及び技能を体系的に整理することで、次の問題解決に生きるものとして習得できる可能性を示唆する肯定的な意見が見られた。一方で、体系的に整理することができず、活用する力の向上につなげられていないという否定的な意見も見られ、本研究の課題も示唆された。

(3) 評価テストから

実践の前後に評価テストを実施した。双方とも、評価

テスト実施の直前に学習した単元に関する内容である。

図13は、事後テストの中で出題した「ある円に外接する円と内接する円の半径を求める問題」に対する生徒Bの解答である。この生徒は、授業で、二円の位置関係について図14のように体系的に整理した生徒である。二円の中心間の距離と半径の和・差との大小を比較し、解決することができている。体系的に整理した知識及び技能を活用し、問題を解決することができた事例である。

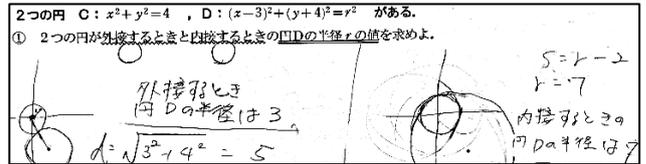


図13 知識及び技能を活用して解決した問題

生徒Bは、授業で扱った問題と異なるパターン

和	…	和	…	差	…
d	↑	↑	↑	↑	↑
長い	外	内	外	内	内
外	部	部	部	部	部

において、事前テストではすべて誤答であったが、事後テストでは10問中6問が正答であった。実践を通して、知識及び技能を活用する力を向上させることができたと考える。

また、授業で扱った問題と異なるパターンに対して、クラス全体の結果を比較した。正答率は、事前テストで10.7%、事後テストで23.1%と12.4ポイントの増加が見られた。効果量d^{※4}を調べたところ、中程度の効果が認められた。また、このような問題を1問でも解決できた生徒は、事前テストで5名であったが、事後テストで9名に増加した。これらより、クラス全体としても、知識及び技能を活用する力が育成されたと考える。

※4 効果量d=0.59。効果量dについては慣例に倣い、0.2 ≤ d < 0.5が効果量小、0.5 ≤ d < 0.8が効果量中、0.8 ≤ dが効果量大とする。

2 成果と課題

(1) 研究の成果

知識及び技能を体系的に整理することに焦点を当て、事象を数学化したり解決過程を振り返ったりする過程に手立てを講じ、数学的活動のサイクル化と充実を図ったことによって、生徒が主体的、協働的に学習過程を遂行する姿が見られるようになった。また、体系的に整理した知識及び技能を活用して問題を解決することができ、既習の知識及び技能を活用する力の向上が見られた。

(2) 研究の課題

協力校には、知識及び技能を体系的に整理することが苦手であり、活用する力の向上が見られない生徒もいた。このような生徒は、問題演習中心の指導に慣れ、暗記によって知識及び技能を身に付けようとする意識が強いものとする。学びの変革は一朝一夕には成し得ないが、個別最適化された学びを視野に入れ、授業づくりや単元づくりを工夫する必要がある。