

問題解決の過程において、数学的な思考力を育むための指導の工夫 —問題形成・把握の段階における数学的な考え方を意識した活動を通して—

長期研究員 半谷 徳夫

《研究の要旨》

本研究では、数学の問題解決の過程において、生徒がいろいろな角度から問題を考察することで数学的な思考力が育まれることをめざした。生徒が初見の問題をいろいろな角度から考察するためには、まず、問題の意味を自分なりに把握、解釈することが必要である。また、他者の考え方をすることで、解決方法に幅が広がると考える。生徒が主体的に問題に取り組む態度を育成するために、問題を把握する場面で具体的に「数学的な考え方」を提示し、それらを踏まえた話し合い活動を取り入れた授業実践を行った。

I 研究の趣旨

私自身の授業は、公式を使い形式的に問題解決させる指導が多く、生徒に問題の本質を考えさせる学習をあまりさせなかった。そのため生徒は、簡単に効率よく解こうとするあまり、公式を意識しすぎて、問題の意味を把握しようとしなかったのではないかと考える。

問題解決の過程などにおいて数学を活用していくときの数学的な見方や考え方は、高等学校学習指導要領解説に「主として、問題解決等に当たって、問題を数学の対象としてとらえたり、直観、類推、帰納、演繹などにより、いろいろな角度から問題を考察し、解決の方向を構想したりするときの見方や考え方である。」と示されている。生徒に問題を把握させるためには、この見方や考え方を意識させる必要があると考える。研究協力校の実態調査では、文章題の応用問題において無解答率が32.3%であり、解答している生徒の答案にも問題を考察する記述はあまり見られなかった。授業でも、発展的な問題には自主的に取り組む生徒は少なく、解答を写すだけという傾向が強い。

本研究では、片桐重男の「数学的な考え方」*の分類・整理を参考に、生徒が問題に対していろいろな角度で考察し記述する方法を提示した。また、問題解決の過程を、「問題形成・把握」「見通しを立てる」「解決の実行」という三つの段階に分けた。特に、「問題形成・把握」の段階において「数学的な考え方」を意識して指導することにより、問題や目的・内容を明確に把握しようとする態度の育成を試みた。さらに、他者の意見を知ることによって数学的な見方や考え方を意識させる活動を取り入れた。これらの実践を通し、数学的な見方や考え方の有用性に気付かせ、問題に対して深く考え取り組む態度を養い、生徒の数学的な思考力を育むことができると考えた。

※ 片桐重男 (2004) 「数学的な考え方の具体化と指導」 明治図書

II 研究の概要

1 研究仮説

問題解決の過程において、以下の手だてを講じれば、数学的な見方や考え方のよさに気付かせることができ、生徒の数学的な思考力を育むことができるだろう。

【手だて1】「問題形成・把握」の段階において必要となる、「数学的な考え方」の提示

【手だて2】「数学的な考え方」を踏まえて話し合う場の設定

なお、本研究における数学的な思考力は、事象を数学の問題としてとらえ、問題解決に当たり、「数学的な考え方」を用い、問題を考察し記述する力とする。

2 研究の内容と実際

(1) 手だての内容

① 【手だて1】「問題形成・把握」の段階において必要となる、「数学的な考え方」の提示

「問題形成・把握」の段階では、「具体化」「単純化」「数量化」「図形化」を提示する。問題解決に当たっては、「図形化」や「数量化」により、実際に操作したり試行錯誤したりする活動を通して、「具体化」することで問題を把握させる。そして「単純化」として、条件を簡単にする方法を提示し、最初の問題に関連付けさせる。この考えに基づき、「問題形成・把握」の段階における「数学的な考え方」を意識させ記述できるよう、ワークシートを工夫する(図1)。

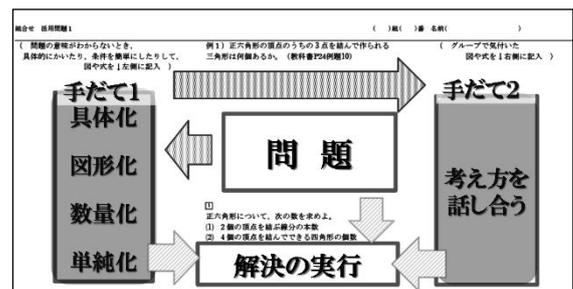


図1 「数学的な考え方」を意識付けるワークシート

② 【手だて2】「数学的な考え方」を踏まえて話し合う場の設定

他者の「数学的な考え方」の記述を知ることによって新たな見方や考え方に気付かせるため、問題を把握する際に用いた図や数について話し合う場を設定し、新たな見方や考え方を記録させる(図1)。その考え方を整理させ、規則性や共通点などを考えさせて解決への見通しをもたせる。話し合いの場において、グループ活動は考え方を共有することで他者の見方や考え方に気付かせること、ペア活動は説明し合うことで問題を振り返り「数学的な考え方」を確認させることが目的である。また、効果的な話し合いの場となるよう「数学的な考え方」の例と確認シートを活用させる(図2)。

② 具体的に考える
 実際に問題文の内容をやってみよう
 具体的に数(文字や図)を入れて考えよう
 ○ 解答に向け、途中の計算はどのように
 1. 公式を使って計算をしている(中央)
 3. 具体的に図や数で問題文の内容を確認している(左側)
 5. 数を簡単にするなど例を挙げて、条件を簡単にしている(左側)

③ 簡単に考えるために
 ・もっと簡単に言うこと…条件を簡単にすると…
 ・数を小さくしてみよう(簡単に考えてみよう)
 531 → 50 → 1
 一つずつ増やして考えよう

図2 「数学的な考え方」の例(左)と確認シート(右)
 (2) 授業実践 I 数学 A 「場合の数」(3学年 6時間)

単元「場合の数」における組合せの内容で、以下の問題に取り組みました。

ある町には、右の図のような道がある。地点 A から地点 B までの、遠回りをしないで行く道順は何通りあるか。

この問題は、教科書では組合せの公式を学習した後に位置付けているが、「問題形成・把握」の段階における「数学的な考え方」を活用させるため、組合せの導入で扱った。

授業では、まず、問題を把握するため、具体的に道順を一つずつ教えさせた。数えるという比較的容易な活動であり、生徒は積極的に活動していたが、経路の数え間違いや記述の誤りが見られた。そこで、問題の図に四角形が多いことに着目させ、四角形の数減らして考えさせた(図3)。四角形が一つするとき、最短の道順の総数は簡単に求められることを実感させて、「単純化」の考え方を提

② (条件を簡単に)してみよう

図3 「数学的な考え方」の記述

示した。その後、自由に四角形を付け加えさせ、道順の総数をそれぞれ求めさせた。各生徒が作成した図や道順の総数をグループ活動で共有させ、規則性がないか考えさせて最初の問題に関連付けていった。

(3) 授業実践 II 数学 A 「約数と倍数」(3学年 8時間)

単元「約数と倍数」における素因数分解の内容で、以下の問題に取り組みました。

$A = \sqrt{60n}$ が自然数になるような最小の n を求めよ。また、そのときの A の値を求めなさい。

この問題は、既習事項と問題の関連付けにも「数学的な考え方」が有効であることを生徒に気付かせるため、素因数分解を指導した後に扱った。

授業では、まず既習内容と関連付け、 $\sqrt{60n}$ の 60 を素因数分解させた(具体化)。そして、問題を把握するため $\sqrt{60n}$ を \sqrt{n} として考えさせ(単純化)、 n に様々な数を代入させ(具体化、数量化)、問題を把握させた。生徒のワークシートには、 n にそれぞれ数を代入して試行錯誤した記述が見られた(図4)。その後、グループでそれぞれの生徒の考え方を話し合わせ、問題に取り組みました。

I (具体的に) 問題を図、数で表す
 $\sqrt{60n} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5 \times n}$
 習ったこと (素因数分解)
 II (条件を明確化) 問題の中で条件となる文章を下線で
 III (条件を簡単に) 実際の条件を簡単にすると… 今回の問題 条件を簡単に 条件を簡単にしたとき

まわりの人々と条件を簡単にしたもの共有
 $\sqrt{n} = \dots$
 $n = 8 \rightarrow \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
 $n = 25 \rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$
 $n = 9 \rightarrow \sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3$
 $n = 16 \rightarrow \sqrt{16} = \sqrt{2^4} = 2^2 = 4$

図4 具体化、単純化の記述(左)他者の考え方の記述(右)

さらに、グループで気付いたことや学んだことを意識して振り返りをさせるため、以下の問題を宿題として設定した。

378 にできるだけ小さな自然数を掛けて、ある自然数の 2 乗にしたい。どのような自然数を掛ければよいか。

宿題は提出をする前に生徒同士ペアで解説をさせた。話し手と聞き手に分け、話し手には自分の宿題の解答を見せながら解説をさせ、聞き手には話し手の試行錯誤したことを確認シートに書きとどめるよう指示をした。確認シートには、「数学的な考え方」を活用している具体的な記述を項目として設定した。そして、それに基づく話し合いの場を設け、「数学的な考え方」を意識付けた(図5)。



図5 ペア活動での様子

3 結果と考察

(1) 授業実践 I における結果と考察

最短の道順の総数を求める問題において、「問題形成・把握」の段階における「数学的な考え方」を踏まえ、グループ活動で、規則性がないか発問をして解決への見通しをもたせた。試行錯誤して、規則性があることに気付いた生徒もいた(図6)。グループ活動を通して「数学的な考え方」を基にした自分と他者の記述の違いに気付く、それらを用いて問題を考察することで解決へつながった記述がワークシートに見られた。

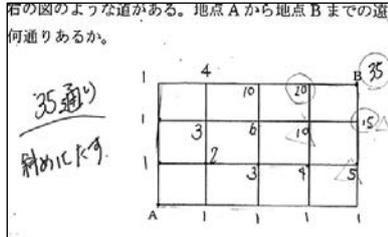


図6 生徒が記述したワークシート

(2) 授業実践 II における結果と考察

素因数分解の内容で設定した宿題の解答では、378を「単純化」し40の場合で考え、2乗とルートに関連付けて考えるなど、授業の問題を基に解決へつながる記述があった(図7)。

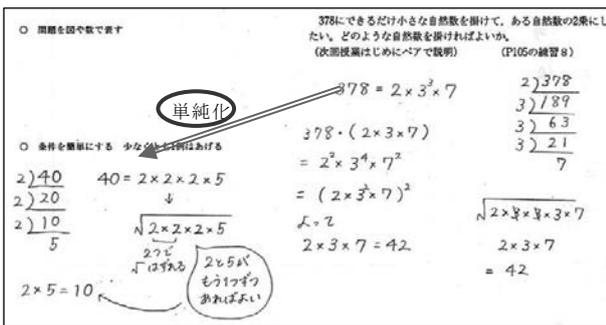


図7 生徒が単純化をした記述

授業実践 II では8時間を通して、グループ活動で扱った問題の類題を宿題として3回行った。各回ともペア活動の後に宿題を提出させ、いずれも正答率が6割を超え、生徒の宿題には「具体化」の記述が多く見られた。生徒が「問題形成・把握」の段階における「具体化」の有用性を実感し、活用した結果とうかがえる。一方、「単純化」の記述はあまりみられなかった(図8)。生徒からは「遠回りでも余計難しくなる。」という意見もあり、「単純化」の有用性がより感じられる問題を提示する必要があったと考えられる。

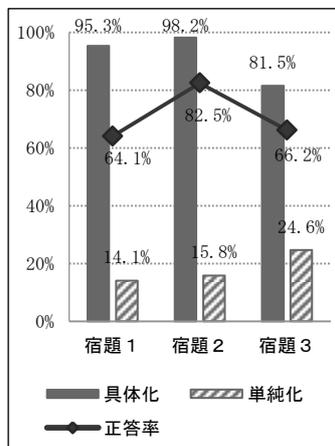


図8 「具体化」「単純化」の記述の割合

III 研究のまとめ

1 研究の成果

事後アンケートの結果では、「問題形成・把握」の段階において、問題を「具体化」や「単純化」することに対し、約8割の生徒が肯定的な回答をしていた(図9)。生徒からは「今まで数を小さくして簡単にするようなことはしてこなかったので、これから問題を解くときには使っていこうと思った」などの意見もあった。

また、話し合い活動では「考えを深めたり広げたりすることができたか」の質問に対し、肯定的な回答が事前アンケートの57%から86.1%へ上昇した(図10)。生徒の中には「自分が思いつかなかったことを友達から聞くことで、いろいろなパターンの考えを知ることができて面白かった。」など、話し合う活動を通し、新たな見方や考え方に気付いた生徒もいた。問題を把握させるために、「数学的な考え方」を意識付け、話し合いをさせた結果とうかがえる。さらに、ワークシートや宿題に「数学的な考え方」を活用し、問題を考察し記述する姿が見られた。それらを踏まえ、生徒に数学的な見方や考え方のよさに気付かせ、数学的な思考力の向上へつながったと考える。

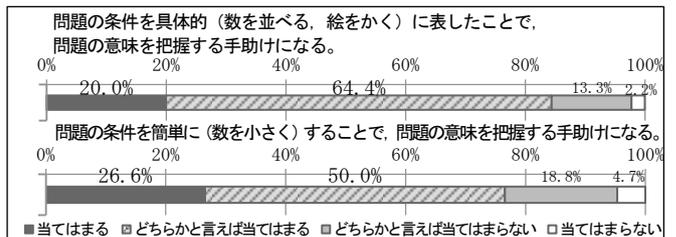


図9 具体化と単純化についての意識調査

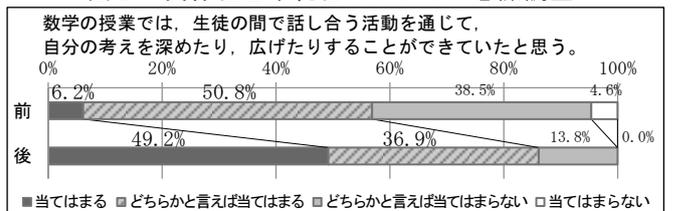


図10 話し合う活動についての意識調査

2 今後の課題

「数学的な考え方」を通し問題を把握させたが、解決の見通しをもつまで試行錯誤させる時間を十分に確保できず、生徒からは、「条件を変えて理解できても最初の問題に活用することが難しい」という意見があった。生徒が問題を「単純化」するために、「単純化」を意識しやすい、教師の問題提示の工夫が重要である。そして、生徒に解決の見通しをもたせるために、考察する時間を十分に確保し、「問題形成・把握」の段階で、生徒の実態に合わせ具体的に「数学的な考え方」を指導していく必要がある。生徒に考えをもたせて記述させる指導と、話し合いの場で考え方を共有させる活動を継続的に設定し、生徒の数学的な思考力の更なる向上をめざしていきたい。