論理的に考え，数学的に表現する力を育む学習指導の在り方（第二年次）

―解決の見通しをもたせ，根拠を明確にさせる活動を通して―

長期研究員　髙 橋　良 太

《研究の要旨》

本研究では，数学科の授業における問題解決過程において，論理的に考え，数学的に表現する力を育むことを目指した。そこで，解決のきっかけとなる着想を生徒から引き出すために，問題提示を工夫した。また，解決に至った根拠を明確にさせるために，問題の解決過程に目を向けさせ，見いだした事柄や事実，事柄が成り立つ理由を問いかけた。これらの手だてを講じることで，明確な根拠に基づいて，筋道立てて説明する生徒の姿が見られた。

Ⅰ　研究の趣旨

次期中学校学習指導要領では，数学科の目標として，「事象を論理的に考察する力」を養うことが位置付けられている。同解説数学編では，「事象を論理的に考察する力」について「問題の解決に当たっては，解決の見通しをもつとともに，その解決の正しいことを確かな根拠から論理的に考察する力が必要である」と示されている。教師は単元全体を通して，生徒一人一人に課題解決につながる見通しをもたせたり，解決に至った根拠を明確にさせたりする必要がある。

平成31年度全国学力・学習状況調査の記述式問題では，本県平均正答率（44.1%）が全国平均（47.1%）を下回っている。また，本県平均無解答率（18.9%）は全国平均（17.1%）に比べて高い。見いだした事柄や事実を説明したり，事柄を調べる方法や手順を説明したり，事柄が成り立つ理由を説明したりすることに課題があることが分かる。さらに，これまでの指導を振り返ると，方程式$2x-3=7$を解く際に，-3を移項して解を求めることができる一方で，その解決過程において移項ができる理由を説明できない生徒が多かった。数学科の授業が問題の解法指導と問題演習に偏っていることが原因の一つであると考える。見いだした事柄や事実，事柄が成り立つ理由を考えさせ，それらを説明する場を設ける必要がある。

第一年次は，生徒から数学的な問いを引き出し，説明し伝え合う必要性を高めるための問題提示を工夫したり，根拠を明確にした説明を記述させた上で，互いに説明し伝え合う場を設定したりすることで，主題に迫った。しかし，他の生徒の説明を聞くだけになってしまったり，板書や友達のノートを写すだけになってしまったりした生徒も見られた。自力解決させる前に，生徒に解決の見通しをもたせる手だてを講じていなかったことが原因と考える。

以上のことから，解決の見通しをもたせ，根拠を明確にさせる活動を通して，論理的に考え，数学的に表現する力の育成を目指したいと考え，本研究の主題を設定した。

Ⅱ　研究の概要

1　研究仮説

数学の授業において，以下の手だてを講じれば，論理的に考え，数学的に表現する力を育むことができるであろう。

【手だて１】着想を引き出す問題提示

【手だて２】根拠を明確にさせる場の設定

なお，本研究では，「論理的に考え，数学的に表現する力」を発揮している姿を，「明確な根拠に基づいて，筋道立てて説明する姿」と定義する。

2　研究の内容

(1)【手だて１】着想を引き出す問題提示

Q　連立方程式 $\begin{cases} 4x+3y=-1 & \cdots① \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=2 & \cdots② \end{cases}$ を解きなさい。

「係数が全部整数になるように変形すれば解ける」―着想

②×６

$\begin{cases} 4x+3y=-1 & \cdots① \\ 3x-2y=12 & \cdots② \end{cases}$

①×２　　$8x+6y=-2$

②’×３　$+)\ 9x-6y=36$

$17x=34$

$x=2$

$x=2$ を①に代入すると

$8+3y=-1$

$3y=-9$

$y=-3$

答　$x=2, y=-3$

―筋道

図１　着想と筋道

生徒にもたせる解決の見通しを，着想（解決のきっかけとなる考え）と筋道（解決に至るまでの順序）の二つに分ける（図１）。本研究では，問題の条件を工夫して出題したり，図などと関連付けて出題したり，既習と未習を対比させて出題したりする。その上で，解決に必要な条件や既習事項とのつながりに気付かせたりすることで，着想を引き出す。

(2)【手だて２】根拠を明確にさせる場の設定

問題の解決過程に目を向けさせ，「この式は何を表しているのか」や「どうしてこのような答えになるのか」などと，見いだした事柄や事実，事柄が成り立つ理由を

問うことで，既習事項や事実に基づいた考えなど，問題の解決に必要な根拠を明確にさせる。また，生徒自らが根拠を明確にすることが難しい場合は，段階的に根拠となる既習事項に気付かせていく。

３　研究の実際

(1) 授業実践単元

対 象 生 徒	第８学年10名（１学級）
授業実践Ⅰ	「連立方程式」(14時間)
授業実践Ⅱ	「１次関数」(14時間)

(2) 授業実践Ⅰ「連立方程式」(３／14時間)

連立方程式の解き方を学習する内容で，「連立方程式は，一つの文字を消去して１次方程式にすれば解けることを理解する」ことをねらいとして授業を行った。

① 【手だて１】について

「りんご２個とオレンジ３個の代金の合計は480円」というもう一つの条件を伏せて，以下の問題を提示した。

> あるくだもの店で買い物をしたら，りんご２個とオレンジ５個の代金の合計は600円でした。りんご１個とオレンジ１個の値段は，それぞれ何円ですか。

生徒は「りんご１個50円，オレンジ１個100円」「りんご１個０円，オレンジ１個120円」「値段の組合せはいろいろありそう」などと，一つの条件ではりんごとオレンジの値段が一つに決まらないことに気付いていった。この後,「りんご２個とオレンジ３個の代金の合計は480円」というもう一つの条件を提示することで，二つの条件を比較する必要性に気付かせ，生徒から「差を見れば，オレンジの値段を求められる」という着想を引き出すことができた。その結果，自力解決では，10人中９人の生徒がりんごとオレンジの値段を求めることができていた（図２）。

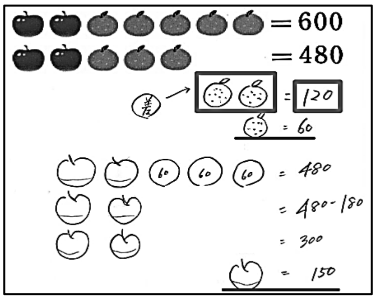


図２　自力解決した生徒の記述

② 【手だて２】について

連立方程式の解き方を確認させた後，連立方程式で解を求めることができる根拠を明確にさせる場を設定した。

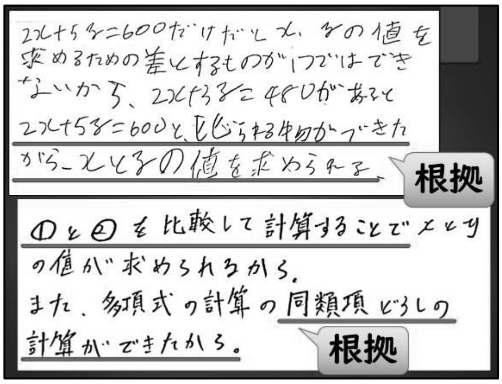


図３　理由の記述

具体的には，２元１次方程式では，解を一つに決めることができないのに対し，連立方程式では，解を一つに決めることができることに目を向けさせ,「どうして連立方程式だと解を求めることができるのか」と問いかけた。その結果，二つの式を比較して文字を消去できることを根拠に，連立方程式で解を求めることができる理由を記述することができていた（図３）。

(3) 授業実践Ⅰ「連立方程式」(７／14時間)

いろいろな連立方程式の解き方を学習する内容で，「かっこを含む連立方程式や，係数に小数や分数を含む連立方程式を解くことができる」ことをねらいとして授業を行った。

① 【手だて１】について

既習（xとyの係数が整数の連立方程式）と未習（かっこや小数，分数を含む連立方程式）を対比させ，以下の問題を提示した。

> １．次の連立方程式を解きなさい。
>
> (A) $\begin{cases} 3x-4y=-15 \\ 2x+3y=7 \end{cases}$　(B) $\begin{cases} 4x+y=10 \\ 5x-2(3x-y)=-7 \end{cases}$　(C) $\begin{cases} 3x-2y=5 \\ 1.2x-0.5y=-1 \end{cases}$　(D) $\begin{cases} 4x+3y=-1 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=2 \end{cases}$

それぞれの連立方程式の共通点や違いに目を向けさせることで,生徒から「どの連立方程式も(A)のように，xとyの係数を整数にすることができれば解ける」という着想を引き出すことができた。その結果，自力解決したことを基に，解決の方法を互いに説明し伝え合う生徒の姿が見られた。

(4) 授業実践Ⅰ「連立方程式」(９／14時間)

連立方程式を利用して問題を解決する内容で，「表，１次方程式，連立方程式を利用するそれぞれの解き方を比較し，連立方程式のよさを考えることができる」ことをねらいとして授業を行った。

① 【手だて２】について

日常場面を取り入れた以下の問題を提示した。

> あるスーパーでは，食パンを買うと３ポイント分，菓子パンを買うと２ポイント分のシールをもらえます。食パンと菓子パンを合わせて10個買い，ポイントの合計は21ポイントになりました。食パンと菓子パンはそれぞれ何個ずつ買ったでしょうか。

１次方程式を利用した解決過程の中から，立式した式に目を向けさせ,「$3x+2(10-x)=21$という方程式や$(10-x)$という式は何を表しているのか」と問いかけた。生徒は「２は菓子パンのポイント」「xが食パンの個数。パンは合わせて10個買ったから，$(10-x)$は菓子パンの個数を表しているんじゃないかな」などと，問題場面から読み取った数量の関係を根拠に，方程式が表す意味を説明することができていた。またノートの記述においても，

方程式が表す意味を記述することができていた（図４）。

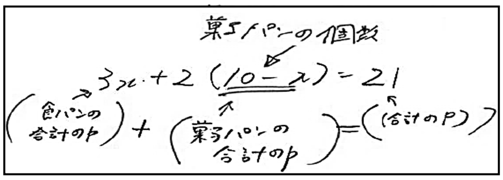


図４　方程式の意味の記述

(5)　授業実践Ⅱ「１次関数」（７／14時間）

二つの２元１次方程式のグラフの交点の意味を学習する内容で，「二つの２元１次方程式のグラフの交点の座標の意味を，連立方程式の解と関連付けて考えることができる」ことをねらいとして授業を行った。

①　【手だて１】について

格子の条件を隠し，「次の図の２直線の交点の座標を求めなさい」という問題を提示した（**図５-左**）。

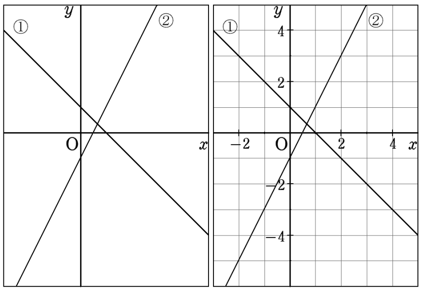


図５　条件を工夫した問題

「直線だから１次関数の式に表せるのではないか」「格子があれば，２直線の式を求めることができるのではないか」などと発言する生徒の姿が見られた。このような着想を引き出した上で，**図５-右**を提示することで，自力解決では，10人中８人の生徒が交点の座標を求めることができていた（**図６**）。

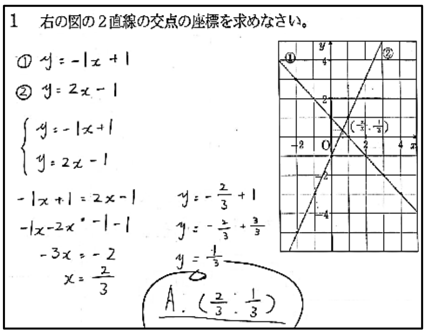


図６　自力解決した生徒の記述

②　【手だて２】について

交点の座標の求め方を確認した後，「どうして連立方程式の解は，グラフの交点の座標になっているのか」と問いかけた。その後，**図７**のようにそれぞれの方程式の解や解の意味を確認させたり，その解がグラフ上の点の座標になっていることに気付かせたりした。その結果，既習の方程式の解の意味を根拠に，連立方程式の解がグラフの交点の座標になる理由を記述することができていた（**図８**）。

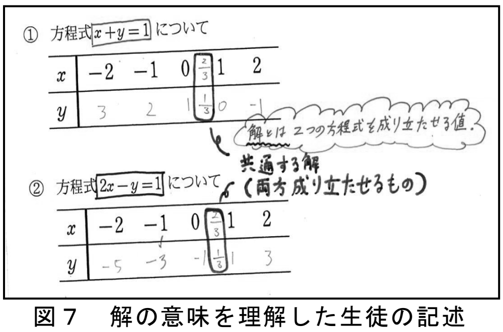


図７　解の意味を理解した生徒の記述

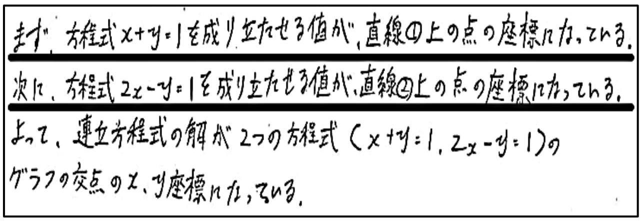


図８　理由の記述

(6)　授業実践Ⅱ「１次関数」（８／14時間）

１次関数を利用して問題を解決する内容で，「線香を燃やした時間と燃え残った線香の長さの関係を１次関数とみなして，問題を解決することができる」ことをねらいとして授業を行った。

①　【手だて１】について

時間と長さの関係に着目させるために，線香を燃やす時間を５分間に制限した以下の問題を提示した。

線香を燃やす実験を５分間行い，得られたデータを基に，線香が燃え尽きるまでの時間を求めなさい。

「１分間に燃える線香の長さを調べれば，線香が燃え尽きるまでの時間を求められるのではないか」「火をつける前の線香の長さが知りたい」などと発言する生徒の姿が見られた。このような着想を引き出すことで，１分間に燃える線香の長さの平均を求めたり，グラフをかいたりしながら，線香が燃え尽きるまでの時間を求めることができていた（**図９**）。

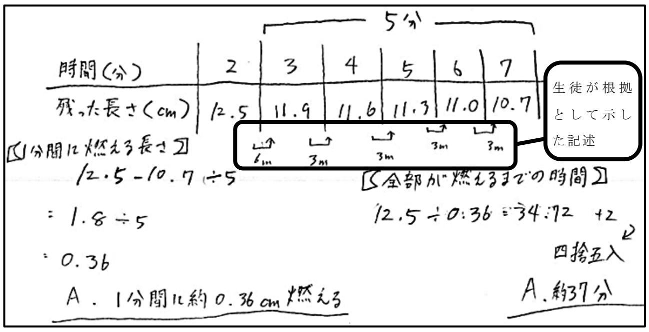


図９　自力解決した生徒の記述

②　【手だて２】について

線香が燃え尽きるまでの時間の求め方を確認した後，「どうして１次関数と判断したのか」と問いかけた。その後のグループ活動では，「燃え残った線香の長さの差がだいたい一定の値になっているから１次関数になるんじゃないかな」と，１次関数は変化の割合が一定であるという既習事項を根拠に，１次関数と判断した理由を説明することができていた（**図９**）。

Ⅲ　研究のまとめ

１　研究の成果

(1)　【手だて１】について

実践の前後で実施した意識調査では，「問題を解く際

にどんな方法で解くか，解決の見通しをもつことができているか」という質問に対して，より肯定的な回答をした生徒が増加し(図10)，平均値の差に関するｔ検定の結果，有意差が認められた（p＜.05)。生徒から着想を引き出すことによって，生徒一人一人が解決の見通しをもって問題解決に取り組むことができたと考えられる。

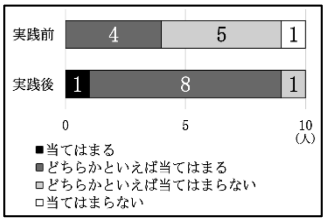


図10　意識調査の結果

(2) 【手だて２】について

「計算の仕方だけでなく，なぜそのような計算ができるのかを理解するようにしているか」という質問に対して，より肯定的な回答をした生徒が増加し（図11)，ｔ検定の結果，有意差が認められた（p＜.05)。また,「今後，数学を学ぶ際に，どんなことを大切にしたいか」という質問に対しては，図12のように，根拠を明確にさせる場の設定による成果がうかがえる記述が見られた。

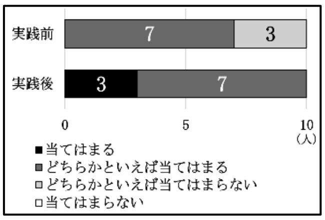


図11　意識調査の結果

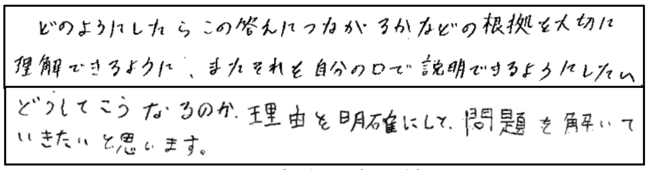


図12　意識調査の結果

さらに授業実践Ⅰにおいては，３時間目の加減法の学習，６時間目の代入法の学習，13時間目の連立３元１次方程式の学習と継続して，連立方程式で解を求めることができる根拠を明確にさせる場を設定することで，10人中８人の生徒がより根拠を明確に示した記述をすることができるようになった（図13)。

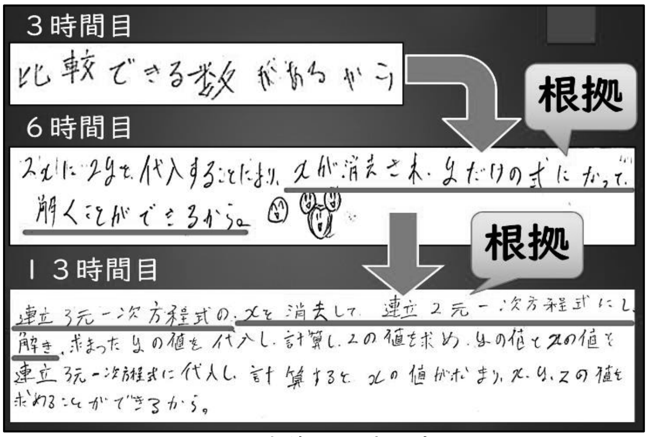


図13　生徒の記述の変化

これらのことから，見いだした事柄や事実，事柄が成り立つ理由を問うことで，問題の解決に必要な根拠を明確にさせることができたと考えられる。

(3) 論理的に考え，数学的に表現する力について

全国学力・学習状況調査を参考に，論理的に考え，数学的に表現する力を測る問題を作成し，授業実践Ⅰと授業実践Ⅱのそれぞれの前後にテストを行った。その結果，実践Ⅰ，実践Ⅱともに，平均正答率が上がり（図14)，ｔ検定の結果，有意差が認められた（p＜.05)。ここで，事前テストで無解答であった生徒の事後テストの解答を示す。実践Ⅰの事後テストでは，問題場面から読み取った数量の関係を根拠に，方程式$\frac{x}{50}+\frac{y}{80}=18$の表す意味を論理的に説明することができるようになった（図15)。

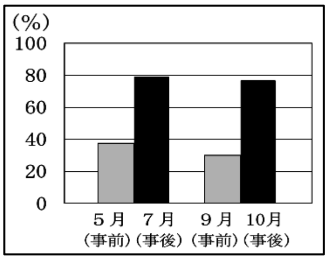


図14　事前・事後テストの平均正答率

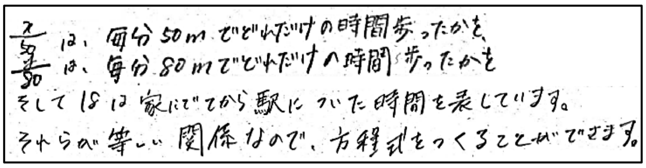
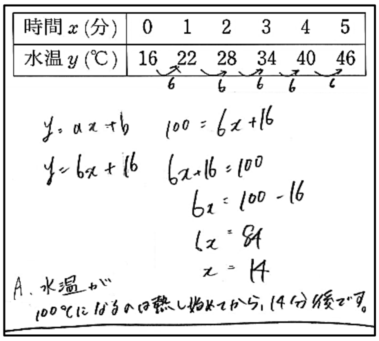


図15　実践Ⅰの事後テストの生徒の解答

実践Ⅱの事後テストでは，１次関数ならば変化の割合が一定であるという既習事項を根拠に,水温が100℃になるのにかかる時間の求め方を論理的に説明することができるようになった(図16)。さらに，実践Ⅰの事後テストにおける把持率※1を測定した。その平均は76.2%であり，高い把持率を保つことができた。



時間 x (分)	0	1	2	3	4	5
水温 y (℃)	16	22	28	34	40	46

図16　実践Ⅱの事後テストの生徒の解答

これらの結果から，本研究において講じた手だて「着想を引き出す問題提示」「根拠を明確にさせる場の設定」が論理的に考え，数学的に表現する力の育成に有効であったと考えられる。

※１　事後テストの正答者のうち，一定期間後も学習内容を把持していた者の割合を示す数値

２　今後の課題

本研究は,「数と式」「関数」の二つの領域での授業実践を基に進めた。今後は,「図形」「データの活用」の各領域においても手だての有効性を検証していく必要がある。また，本研究の中で明確にさせた根拠を振り返ってみると，それが既習事項である場合や事実に基づいた生徒の考えである場合など様々であった。引き出したい根拠の類型づくりと類型に応じた指導の在り方を確立し，手だての汎用性を高めることを目指していきたい。